球面的刚性：Liebmann 定理

钱振烨

2024 年 7 月 3 日

旨趣 我们先介绍一个整体几何基本的工具，即**极值原理**. 操作机理为：紧致闭曲面上的连续函数必有极值，再通过极值性刻画几何. 利用极值原理可以证明球面的 Liebmann 定理，其刻画了球面的刚性. 从证明中可以发现，Hilbert 引理是本质的，我们选取了**主曲率函数**作为讨论极值的函数. 最后发现主曲率函数之间的单调关系是导致极值可操作的底层逻辑，刻画了一般的 Weingarten 曲面，并做推广.

目录

1 极值原理

操作原理 一些朴素的观念在解决问题时有奇效，数学分析中我们知道紧集上的连续函数必存在极值. 现在将这个观点推广到微分几何，即 $\mathbf{E}^3$ 中紧致曲面上的连续函数必存在极值. 将这个简单的事实称为**极值原理**，并且我们断言：(紧致) 曲面上的特殊连续函数是否取极值刻画了曲面的几何. 这个预见性的推断将几何与分析联系起来，而 “极值性” 担任了二者之间简单却深刻的桥梁. 我们先从抽象层面解释极值原理的操作思路.

设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 中一紧致曲面，$f: M \to \mathbb{R}$ 为光滑映射. 由极值原理，不妨设 f 在 $p \in M$ 处取极大 (小) 值. 于是有

$$\mathrm{d}f = 0, \quad \mathrm{d}^2 f \text{的 } Hesse \text{ 矩阵半负 (正) 定}$$

前者断言算子 df 是零化算子，往往能推出硬性的几何信息，例如正交；后者给出范围性的条件，往往能推出某个几何量小 (大) 于等于零.

更细致的刻画需要归结为一元函数. 不妨在极值点附近**任取**光滑曲线 γ，这是 $f \circ \gamma$ 为单变量函数，于是极值性改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}|_{s=0} f(\gamma(s)) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{ds}^2}|_{s=0} f(\gamma(s)) \leq (\geq) 0$$

反证 有时极值原理可以反其道而行说明曲面**不紧致**. 只要在曲面上构造出不存在极值的连续函数.

例 1.1. 证明 $\mathrm{Int}(D^2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ 为 $\mathbf{E}^3$ 中非紧致曲面.

证明. 取 $\mathrm{Int}(D^2)$ 上连续函数 $f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ 即可. □

2 Liebmann 定理

定理 2.1 (Liebmann,1899)**.** *设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面，且 Gauss 曲率 K 为常数，则 M 必为标准球面.*

这是整体微分几何范畴具有代表性的工作. 一般整体微分几何往往由局部的几何信息加上**弱的**整体信息 (例如拓扑条件：紧致性、连通性等等) 推出一个**强的**整体结果. 必须指出：拓扑条件中，只有紧致性与闭曲面是本质的，连通性只为了保证不出现多个球面. 若读者熟悉黎曼几何，从内蕴的角度看可以发现，条件中 “$\mathbf{E}^3$ 中的曲面” 是不可缺少的，它表示曲面 M 是 $\mathbf{E}^3$ 的光滑嵌入子流形. 事实上我们有反例，即**平坦环面** T^2，它的 Gauss 曲率恒为零. 从这一点也可以看出，不存在光滑嵌入到 $\mathbf{E}^3$ 中的平坦环面.[1]

2.1 第一引理

从定理的结果可以看出，拓扑条件下，常 Gauss 曲率蕴含 Gauss 曲率大于零. 因此，最初的想法是要确定：$\mathbf{E}^3$ 中紧致闭曲面至少**存在** Gauss 曲率大于零的点，即椭圆点.

[1]实际上，不存在 C^2 的嵌入，但存在 C^1 的嵌入，即 $Nash-Kuiper$ 定理，参见 [3]. 但直到 2012 年才找到这样 C^1 嵌入的构造，参见 [1].

引理 2.1. 设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 中紧致闭曲面，则必存在至少一个椭圆点.

注记 2.1. 事实上，即使不为解决以上定理，我们会自然猜想：$\mathbf{E}^3$ 中紧致闭曲面上一定存在椭圆点. 直观上这很容易理解，条件保证曲面作为 $\mathbf{E}^3$ 的子集是有界闭集，考虑以原点为球星的大球面包住该曲面再逐渐缩小，直至与该曲面产生第一个交 (切) 点，这个点处曲面的弯曲必然大于球面的弯曲，则曲面该点必为椭圆点.

我们将这个直观严格刻画出来.

证明. 虽然上述说法提供了很强的几何观念，但是我们还是利用构造函数及其极值原理的方法来说明证明，事实上函数的极值点就是上述的交 (切) 点，读者很容易发现这个几何关系.

取曲面 M 的位置向量 $x(p), p \in M$，构造**距离平方函数**

$$d^2(p) = x(p) \cdot x(p)$$

显然函数光滑，由紧致性可知在 M 上存在极大值点，不妨记为 p_0. 我们有

$$\mathrm{d}|_{p_0} d^2 = 0, \quad \mathrm{d}^2|_{p_0} d^2 \leq 0$$

取过 p 点 M 上任一光滑曲线 γ 使得 $\gamma(0) = p_0$，不妨 $x = x \circ \gamma(s)$. 第一式得到 $x(0) \cdot \dot{x}(0) = 0$，蕴含 $x(0) \perp \dot{x}(0)$. 令 n 为 M 的法向量场，于是 $x(p_0) = \lambda n(p_0)$，其中 $\lambda \neq 0$.[2]第二式得到

$$x(0) \cdot \ddot{x}(0) + \dot{x}(0) \cdot \dot{x}(0) \leq 1$$

注意到 $\dot{\gamma(0)}$ 方向的法曲率 $k_n(\dot{\gamma(0)}) = \ddot{x}(0) \cdot n(p_0)$ 于是

$$k_n(\dot{\gamma(0)}) \leq -\frac{1}{\lambda}$$

由曲线 γ 的任意性可知主曲率满足

$$k_1, k_2 \leq -\frac{1}{\lambda}$$

因此 $K = k_1 k_2 \geq \frac{1}{\lambda^2} > 0$.[3] □

注记 2.2. 从思想方法上看，这里的距离平方函数反映了曲面的 (外蕴) 几何，这是分析在几何上的一次简单应用.

回到引理前的断言，我们说明了 $\mathbf{E}^3$ 中紧致闭曲面若具有常 Gauss 曲率，则必有**正的**常 Gauss 曲率. 随即有以下推论：

推论 2.1. $\mathbf{E}^3$ 中不存在常零 Gauss 曲率或常负 Gauss 曲率的紧致闭曲面.

---

[2]直观上可以发现，p_0 点必为与大球面的交 (切) 点.

[3]不难看出，这里的 λ 就是大球面的半径.

2.2 第二引理：Hilbert 引理

再次回到定理条件，从 Gauss 曲率为常数我们知道

$$k_1k_2 \equiv const$$

若将 $k_1, k_2(k_1 \geq k_2)$ 分别视为曲面的两个**主曲率函数**，它们显然是连续的，若无脐点则具有光滑性. 在常 Gauss 曲率下注意到：当 k_1 取局部极大值时 k_2 必取极小值. 在这个极值点处，我们有以下非平凡的观察:

定理 2.2 (Hilbert,1909)**.** *上述主曲率函数 k_1, k_2 若满足:*

1. *k_1 在 p_0 点处达局部极大值;*
2. *k_2 在 p_0 点处达局部极小值;*
3. *$k_1 \neq k_2$，即 p_0 非脐点.*

则 $K \leq 0$.

证明. 我们利用 $E.Cartan$ 幺正标架法给一个简洁的证明，主要思路是用主曲率函数以及两个微分形式 ω^1, ω^2 表示联络 1− 形式 ω_1^2，再通过 Gauss 方程得到“外蕴表达的”[4]Gauss 曲率.

由 3. 可知 P_0 不是脐点，于是在局部主曲率函数光滑，不妨选择曲率线网. 于是有 Weingarten 公式：

$$\begin{cases} \omega_1^3 = k_1\omega^1 \\ \omega_2^3 = k_2\omega^2 \end{cases}$$

结合 Codazzi 方程整理得到

$$\begin{cases} 0 = \left[-\dfrac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\omega^1 + (k_1 - k_2)\omega_1^2\right] \wedge \omega^2 \\ 0 = \left[-\dfrac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\omega^2 + (k_1 - k_2)\omega_1^2\right] \wedge \omega^1 \end{cases}$$

从上式中观察得到

$$(k_1 - k_2)\omega_1^2 = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\omega^2$$

对上式两边取外微分，结合极值原理和 Gauss 方程可得

$$K = \frac{1}{(k_1 - k_2)}\left[\frac{(k_1)_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{(k_2)_{uu}}{\sqrt{E}}\right]$$

由于 $k_1 > k_2$，又 k_1, k_2 分别取极大极小值，故 $(k_1)_{vv} \leq 0, (k_2)_{uu} \geq 0$，因此

$$K \leq 0$$

□

[4]所谓外蕴表达指的是在表示过程中用到了 Weingarten 公式与 Codazzi 方程. 事实上，回忆古典微分几何，联络 1− 形式 ω_1^2 可以仅用 Gauss 公式推出，再结合 Gauss 方程得到一个内蕴的表达.

3 Liebmann 定理的证明

我们援引陈省身先生基于 Hilbert 的工作给出的证明，参见 [2].

证明. 由推论2.1可知曲面 M 上每点都是椭圆点，由紧致性可知条件 $k_1k_2 = K \equiv const > 0$ 蕴含某点处 k_1, k_2 分别取极大极小值 (由于 K 是一致的常数，故取最大最小值)，不妨记为 p_0. 由定理2.2可知 p_0 必为脐点. 以下不等式说明对每一点 $p \in M$，都是脐点

$$k_1(p_0) \geq k_1(p) \geq k_2(p) \geq k_2(p_0) = k_1(p_0)$$

故 M 是球面 (的一部分). 紧致性蕴含 M 为闭子集，光滑性 (微分流形) 蕴含 M 为开子集，再由连通性可知 M 为标准球面. □

4 推广

我们观察以上证明，条件 $K \equiv const$ 只是用来说明 “当 k_1 取极大值时 k_2 取极小值”，而本质上 k_2 是关于 k_1 的递减函数，即存在递减函数 $k_2 = f(k_1)$. 在 [4] 中给出更一般的刻画，称为 Weingarten 曲面. 上述递减的情形称为**椭圆型** Weingarten 曲面. 在这个观点下将 Liebmann 定理的条件改写为 “设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面，存在递减函数 f 使得主曲率函数 k_1, k_2 满足关系 $k_2 = f(k_1)$” . 于是可以模仿上述证明给出椭圆型 Weingarten 曲面的结果 (这是更本质的).

定理 4.1. *设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面,且是具有正 Gauss 曲率的椭圆型 Weingarten 曲面，则 M 必为标准球面.*

注意到 $k_2 = f(k_1)$ 其中 f 是递减函数的情况可以很多，例如常 (正) 平均曲率曲面，即 $k_1 + k_2 = H \equiv const$. 我们有如下推论：

推论 4.1. *设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面，且是具有正 Gauss 曲率常平均曲率曲面，则 M 必为标准球面.*

注意到上述推论4.1中，条件 $K > 0$ 实际上为曲面加了拓扑限制，即同胚于球面 (或者说单连通). 而事实上条件 $K > 0$ 可以弱化为 “曲面同胚于球面”，这就是著名的 Hopf **定理**.

参考文献

[1] Vincent Borrelli, Saïd Jabrane, Francis Lazarus, and Boris Thibert. Flat tori in three-dimensional space and convex integration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(19):7218–7223, 2012.

[2] Shiing-shen Chern. Some new characterizations of the euclidean sphere. 1945.

[3] John Nash. C 1 isometric imbeddings. *Annals of mathematics*, 60(3):383–396, 1954.

[4] 沈一兵. *整体微分几何初步: 第三版*. 高等教育出版社, 2009.