凸曲面的 Hadamard 定理与积分公式

钱振烨

2024 年 7 月 3 日

旨趣 我们首先利用**支持函数**的值分布直观上刻画凸曲面,以此为基础证明 Hadamard 定理. 注意到可以通过选择整体分布的 1− 形式利用 Stokes **公式**对紧致闭曲面有一个几何的刻画，于是得到两个 Minkowski **积分公式**. 最后用积分公式回过来刻画凸曲面的整体几何.

目录

1 凸曲面的刻画

我们现在观察一类曲面.

定义 1.1. 称 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面 M 为**凸曲面**，如果其为与每点切平面的同一侧. 即对任意 $p_0 \in M$，函数 $f(p) = (x(p) - x(p_0)) \cdot \mathbf{n}(p_0)$ 在 M 上不变号.

对于这类曲面，[3] 中摘录了 Hadamard 在 1897 年的工作.

定理 1.1 (Hadamard,1897)**.** *$\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面 M 若 Gauss 曲率处处为正，那么 M 必为凸曲面.*

我们利用反证法给出证明，事实上若存在一点 p_0 使得其切平面的两侧均有曲面的点，直观上 $K(p_0) < 0$. 一个非平凡的观察是：p_0 点的切平面应夹于另外两个与之

平行的切平面之间，故有 3 个共线的法向量，必有其二相同，这说明 Gauss 映射 g 不是单射！我们断言这件事情是不可能的，即 Gauss 曲率处处为正的曲面出发的 Gauss 映射一定是 $1-1$ 的. 事实上当时 Hadamard 给出的证明就是利用如下引理：

引理 1.1. $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通且 Gauss 曲率处处为正的闭曲面出发的 Gauss 映射一定是 $1-1$ 的.

注记 1.1. 有些教材中也将这个引理称为 Hadamard 定理，例如 *[4]*，因为它是本质的.

2 Hadamard 定理的证明

我们先证明引理.

证明. 先证明 g 为满射. 对任意 $e \in S^2$，要证存在 $\mathbf{n}(p_0) = e$. 考察函数 $f(p) = \mathbf{n}(p)\cdot e \leq 1$. 由极值原理可知，存在极大值点 p_0 使得

$$0 = \mathrm{d}f(p_0) = (\mathbf{n}_u \cdot e)\mathrm{d}u + (\mathbf{n}_v \cdot e)\mathrm{d}v$$

于是[1]

$$\begin{cases} \mathbf{n}_u \cdot e = 0 \\ \mathbf{n}_v \cdot e = 0 \end{cases}$$

不妨取正交参数网，有如下表示

$$\begin{cases} \mathbf{n}_u = -\dfrac{L}{E}\mathbf{x}_u - \dfrac{M}{G}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{n}_v = -\dfrac{M}{E}\mathbf{x}_u - \dfrac{N}{G}\mathbf{x}_v \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} -\dfrac{L}{E}(\mathbf{x}_u \cdot e) - \dfrac{M}{G}(\mathbf{x}_v \cdot e) = 0 \\ -\dfrac{M}{E}(\mathbf{x}_u \cdot e) - \dfrac{N}{G}(\mathbf{x}_v \cdot e) = 0 \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数行列式为 $K > 0$，故只有零解，因此 $e = \pm\mathbf{n}(p_0)$. 再利用极大性，可知

$$0 \geq f_{uu} = \left[-\frac{L}{E}\mathbf{x}_{uu} - \frac{M}{G}\mathbf{x}_{uv}\right] \cdot e$$

将 $e = -\mathbf{n}(p_0)$ 带入上式，我们有

$$0 \geq \frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G}$$

[1]从该方程组中我们隐约可以观察到几何信息，即 e 是与切平面正交的，为此需要使用切向量来说明.

矛盾!

再证 g 为单射. 假设存在两个点 p,q 使得 $g(p)=g(q)=e\in S^2$. 注意到 $K=(\mathbf{n}_u\times\mathbf{n}_v)/(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_u)$ 为 g 的 Jacobi 行列式，利用 $K>0$ 结合逆映射定理可知，存在 p,q 的邻域 U_p,U_q，其内 g 是微分同胚. 不妨 $U_p\cap U_q=\emptyset$ 以及 $g(U_p)\subset g(U_q)$. 由于 g 是满射可知

$$\int_{M-U_p}K\mathrm{d}A\geq\int_{S^2}\mathrm{d}\tilde{A}=4\pi$$

而

$$4\pi=\int_M K\mathrm{d}A\geq\int_{M-U_p}K\mathrm{d}A+\int_{U_p}K\mathrm{d}A>4\pi$$

矛盾! □

注记 2.1. 我们在证明单射性质时用到了 K 是 g 的 Jacobi 行列式这一事实. 实际上，对任何局部 $K\neq0$ 的曲面，都有 g 的局部微分同胚性，我们把满足这样的 M 上的点称为**正则点**，像中的点称为**正则值**，参见 *[2]*. 立即可以发现 S^2 中某个正则值 e 的原像 $g^{-1}(e)$ 的局部是曲面 M 中的“山丘”或“盆地”，并且原像个数 $\#g^{-1}(e)$ 可以体现曲面的凹凸性或粗糙程度.

最后我们来证明 Hadamard 定理.

证明. 假设存在点 p_0 使得其切平面两侧存在曲面的点. 因此，对于函数 $f(p)$ 在 M 上变号，即 $\{p\in M|f(p)>0\}$ 和 $\{p\in M|f(p)<0\}$ 非空. 不妨设 q_1,q_2 分别为二者的最大最小值，对 f 求一次微分可知 $\mathbf{n}(q_1),\mathbf{n}(q_2)$ 都与 $\mathbf{n}(p_0)$ 平行，故 g 不是单射，矛盾! □

定义 2.1. 称 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面 M 为**卵形面**，如果 Gauss 曲率处处为正.

注记 2.2. 事实上，Hadamard 定理的条件可以弱化为 $K\geq0$，但证明困难得多，参见 *[1]*.

3 积分公式

回忆 Gauss $-$ Bonnet 定理的证明，实际上我们应用了整体微分几何一个重要的工具——Stokes 公式，即利用一个整体定义的 1$-$ 形式在积分上联系曲面与其边界. 特别地，当选择一些特殊的 1$-$ 形式并且 $\partial M=\emptyset$ 时，会有深刻的几何信息.

3.1 Minkowski 积分公式

我们在 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面 M 上给定两个整体定义的 $1-$ 形式 $(\mathbf{x},\mathbf{n},\mathrm{d}\mathbf{n})$ 和 $(\mathbf{x},\mathbf{n},\mathrm{d}\mathbf{x})$，分别作用外微分，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{n},\mathrm{d}\mathbf{n}) &= (\mathrm{d}\mathbf{x},\mathbf{n},\mathrm{d}\mathbf{n})+(\mathbf{x},\mathrm{d}\mathbf{n},\mathrm{d}\mathbf{n})\\ &= (\omega^1 e_1+\omega^2 e_2, e_3, \omega_3^1 e_1+\omega_3^2 e_2)+(\mathbf{x},\omega_3^1 e_1+\omega_3^2 e_2,\omega_3^1 e_1+\omega_3^2 e_2)\\ &= \omega^2\wedge\omega_3^1-\omega^1\wedge\omega_3^2+(2\omega_3^2\wedge\omega_3^1)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\\ &= [2H+2K(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})]\omega^1\wedge\omega^2\end{aligned}$$

同理

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{n},\mathrm{d}\mathbf{x}) = [2H(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})+2]\omega^1\wedge\omega^2$$

构造**支持函数** $\varphi=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$. 由 Stokes 公式，我们有

$$\int_M H\mathrm{d}A+\int_M K\varphi\mathrm{d}A=0$$

和

$$\int_M H\varphi\mathrm{d}A+\int_M \mathrm{d}A=0$$

我们称以上二式为 Minkowski **积分公式**.

3.2 积分公式在凸曲面上的应用

凸曲面的一个好处是：在其包围的区域内任一点都在其同一侧，于是可以选取原点在其内部使得支持函数 φ 不变号.

Liebmann **定理的另一证明** 假设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 内紧致连通闭曲面，且具有常正 Gauss 曲率 (必有椭圆点)，即是一个卵形面，由 Hadamard 定理，即定理1.1可知该曲面一定是凸曲面. 于是可以选取其围成区域内部一点为原点，选择合适的法向量使得支持函数 $\varphi<0$，第一 Minkowski 积分公式蕴含此时 $H>0$. 我们需要联系 H 和 K，为此做如下观察：

$$H^2-K=\frac{1}{4}(k_1-k_2)^2\geq 0$$

取等号当且仅当 $k_1=k_2$，即脐点. 要证 Liebmann 定理即证恒有 $H^2=K$.

证明. 利用第一 Minkowski 积分公式，我们有

$$\int_M K\varphi=-\int_M H\leq-\int_M\sqrt{K}=-\sqrt{K}\int_M$$

再利用第二 Minkowski 积分公式，进而

$$-\sqrt{K}\int_M=\sqrt{K}\int_M H\varphi\leq K\int_M\varphi\leq\int_M K\varphi$$

综上只能 $H^2=K$. □

在常平均曲率的凸曲面上的应用

定理 3.1. 设 M 为 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通凸闭曲面，且具有常平均曲率，则 M 必为标准球面.

证明. 利用 Minkowski 积分公式，我们有

$$\int_M K\varphi = -\int_M H = H^2\int_M \varphi = \int_M H^2\varphi$$

说明 $\int_M (H^2-K)\varphi = 0$. 而 $(H^2-K)\varphi \geq 0$，故

$$H^2 = K$$

□

参考文献

[1] Shiing-shen Chern and Richard K Lashof. On the total curvature of immersed manifolds. *American journal of mathematics*, 79(2):306–318, 1957.

[2] John Willard Milnor and David W Weaver. *Topology from the differentiable viewpoint*, volume 21. Princeton university press, 1997.

[3] 彭家贵. 微分几何. 高等教育出版社, 2021.

[4] 沈一兵. *整体微分几何初步: 第三版*. 高等教育出版社, 2009.