黎曼几何

钱振烨

2024 年 7 月 21 日

目录

第一章　预备知识

旨趣　在第一章中我们只对基本的黎曼度量进行讨论，同时引入流形上分析的工具，对高维几何缺少了解的读者请先移步附录的节3.1.

历史观点　Riemann 于 1854 年[1]在 Göttingen 大学发表的就职演讲,即"**On the hypothesis which lie at the foundation of geometry**"，参见 [12]. 这篇演讲为此后近两百年的几何指出研究方向，它们对应了我们的两门基础课**流形**与**黎曼几何**[2]. 最基本的想法就是发展**高维内蕴**几何，这源自于他的老师 Gauss1827 年的文章"**General investigation of curved surfaces**"的启发即经典微分几何最著名的定理 Theorema Egregium：其中 Gauss 曲率仅与曲面本身的度量 (第一基本形式) 有关，因此研究曲面的弯曲可以脱离其存在的空间而研究其本身，参见 [2].

Riemann 的观点主要有以下三方面：

1. 提出**流形**的概念[3]，将内蕴几何的研究推广到**高维**，即不再是 Gauss 时代的二维曲面，而是 n 维几何体.

2. 在流形上规定一个正定**二次型** (即现在的黎曼度量)，发展**内蕴几何**[4]. 当时 Riemann 向自己提了一个很要紧的问题:何时两个黎曼度量是局部等距的?即现在黎曼流形范畴的等价问题.Riemann 指出，利用对于 n 维流形，需要 $n(n-1)/2$ 个函数完全决定其度量结构，并且对流形的"曲率"(弯曲问题)，则可利用其切空间每个二维子空间的**截面曲率**来决定，这实际上是二维曲面的推广.

3. 黎曼几何可以应用到不同方面，例如物理：大约 60 年后，Einstein 利用黎曼流形的工具发展了著名的**相对论**，特别是引力场方程：

$$G_{ij} = \mathrm{Ric}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

其中 G_{ij} 为 Einstein 张量，G 为万有引力常数，c 为真空中的光速，T_{ij} 为能动张量.

[1] 1854 年 6 月 10 日

[2] 本小册大部分问题在黎曼流形上讨论，因此默认读者熟悉基本的微分流形，参见 [15, 1, 5, 7, 6, 11].

[3] 由于拓扑学语言的缺乏 (事实上最早提出微分流形概念的数学家是 Weyl，时间已来到 1912 年)，Riemann 对于流形的叙述是不严谨的，当时人们认为似乎是一种哲学观念.

[4] 当时 Riemann 更关心流形上的度量结构，这实际上是现在的 Finsler 几何，由 Finsler 于 1918 年提出.

1.1 黎曼度量与黎曼流形

1.1.1 黎曼度量

回忆曲面论中我们利用第一基本形式来计算曲面上曲线的长度、曲面片的面积. 而第一基本形式本质上为曲面切平面上光滑指定的**内积**. 现在将这个观点推广到一般的微分流形[5] M 上. 但二者又有不同. 必须指出的是，曲面论的基本想法是给定一张曲面 S，再求出其上的第一基本形式，最后计算度量信息；而黎曼几何的基本思想是：给定流形 M，在其上指定一个"第一基本形式"(原本并没有)，最后计算度量信息. 同时我们又希望指定的度量与流形本身的微分结构是兼容的，于是这个指定应该光滑依赖于点的选取.

¶ 黎曼度量的定义

定义 1.1.1. 流形 M 上一个**黎曼度量** g 是一个"光滑指定"，即对 M 的每个切空间 T_pM，指定一个内积

$$g_p(-,-)=<-,->_p$$

且其光滑依赖于 p.

注记 1.1.1. 光滑依赖指：设 X,Y 为 M 的一个坐标卡 U 上的光滑向量场，则 $<X_p,Y_p>_p=g_p(X_p,Y_p)$ 为 U 上的光滑函数.

取 U 上一组自然切向量基 $\{\partial_i\}$，我们记

$$g_{ij}(p):=<\partial_i,\partial_j>_p=g(\partial_i,\partial_j)(p)$$

于是对 U 上任意光滑向量场 $X=X^i\partial_i,Y=Y^j\partial_j$，有

$$<X_p,Y_p>_p=g_{ij}(p)X^i(p)Y^j(p)$$

¶ 黎曼度量的张量叙述　容易发现 g 是一个 $(0,2)$ 型张量，即

$$g:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to C^\infty(M)$$

事实上，若有另一坐标卡 $\tilde{U}$，规定其上自然基向量为 $\tilde{\partial}_i$，则有基变换 $\tilde{\partial}_i=(\partial x^j/\partial\tilde{x}^i)\partial_j$. 记 Jacobian 矩阵 $(\partial x^j/\partial\tilde{x}^i)_{m\times m}$ 为 J，考察

$$\tilde{g}_{ij}=<\tilde{\partial}_i,\tilde{\partial}_j>=g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\tilde{x}^j}$$

故

$$(\tilde{g}_{ij})=J^T(g_{ij})J$$

因此上述定义是良性的(回忆经典微分几何中的"第一基本形式不变性"，具体写出换基以后的表达式.)，并且在 U 上有局部表示

$$g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$$

其中 $\{dx^i\}$ 为 $\{\partial_i\}$ 的对偶场. 因此黎曼度量可以用张量语言[6]叙述，参见 [15, 1, 5, 11].

[5] 本小册中如不加说明，默认微分流形为光滑流形，有时简称流形.

[6] 利用张量的好处是不再依附于点的选取，而是观察整个丛截面，我们很快会看到这个语言的优势.

¶ **对偶度量**　现在我们把黎曼度量的作用推广到一般的张量场上. 为此先定义余向量场的情形. 记 (g_{ij}) 的逆矩阵为 (g^{ij})，满足 $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$. 对任意 $\omega=\omega_i dx^i,\eta=\eta_j dx^j\in\Gamma(T^*M)$，定义黎曼度量 g 的对偶度量 g^* 为

$$g^*(\omega,\eta)=<\omega,\eta>^*:=g^{ij}\omega_i\eta_j$$

显然与坐标卡的选取无关，因此是良性的. 请读者自行验证！

¶ Musical **同构**　在正式定义一般情形前，我们先讨论一个基本的同构. 假定已经定义了 T_pM 上的内积 g，即黎曼度量. 规定 flat 同构

$$\flat: T_pM\to T_p^*M,\quad \text{其中 } \flat(X_p)(Y_p):=g_p(X_p,Y_p)$$

这里 $\flat$ 光滑依赖于 p 的选取，因此将 $\flat$ 视为丛同构，即

$$\flat: TM\to T^*M, \text{其中 } (p,X_p)\to(p,\flat(X_p))$$

进而省略指标，为 $X\to\flat(X)$，这里 $\flat(X)$ 是一个线性泛函 (余向量场)，有 $\flat(X)(Y)=g(X,Y)$. 考察 $\flat$ 在任一向量场 $X=X^i\partial_i$ 上的作用，作 $\flat(X)(\partial_j)=g_{ij}X^i$，视 $X_j:=g_{ij}X^i$，于是有

$$\flat(X^i\partial_i)=X_j dx^j$$

我们说此时 $\flat$ 通过 g_{ij} 拉下指标.

再考察 $\flat$ 的逆变换，即 sharp 同构

$$\sharp: T^*M\to TM$$

对任意 $\omega=\omega_i dx^i\in T^*M$，于是 $\sharp(\omega_i dx^i):=g^{ij}\omega_i\partial_j$. 同理，视 $\omega^j:=g^{ij}\omega_i$，因此 $\sharp$ 通过 g^{ij} 拉上指标. 我们称 $\flat,\sharp$ 为 Musical **同构**[7]. 回到对偶度量，容易发现

$$g(\sharp\omega,\sharp\eta)=g_{ij}g^{ik}\omega_k g^{jl}\omega_l=g^*(\omega,\eta),\quad \omega=\omega_k dx^k,\eta=\eta_l dx^l$$

因此对偶度量 g^* 可以利用 Musical 同构给出“不显示坐标”的定义.

我们现在将黎曼度量定义在一般的张量场上，由于 T_pM 与 T_p^*M 都装备了相应的内积 g,g^*，可以自然定义如下张量积[8]

$$\bigotimes_{i=1}^{k}T_pM\otimes\bigotimes_{j=1}^{l}T_p^*M$$

上的自然内积 $T_k^l(g)$,仍然记为 g. 容易发现上述张量积的自然基底为 $\{\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_k}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_l}\}$，因此任一 (k,l) 型张量可以表达为

$$T=T_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}\partial_{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{i_k}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_l}$$

同样的方式记 S，我们有

$$g(T,S)=<T,S>=g^{j_1b_1}\cdots g^{j_lb_l}g_{i_1a_1}\cdots g_{i_ka_k}T_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_l}S_{a_1\cdots a_k}^{b_1\cdots b_l}$$

[7]乐谱中将 $\flat,\sharp$ 视为两种“降调”与“升调”符号，正好与这里的拉下与拉上指标对应.

[8]后面为简化记号，记为 $\otimes^{k,l}T_pM$.

1.1.2　黎曼流形

定义 1.1.2. 给定 g 为流形 M 的一个黎曼度量，称 (M,g)[9]为一个**黎曼流形**.

例子 1.1.1. 最简单的黎曼流形是欧式空间 $\mathbb{R}^n$. 对 $\mathbb{R}^n$ 上每点的切空间有自然的标准内积，将其规定为**标准欧式度量**，即

$$g^0(X,Y) := \sum_i X^i Y^i = X^T Y$$

或者，当 $\mathbb{R}^n$ 被唯一坐标卡 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 覆盖，此时 $g^0_{ij}=\delta_{ij}$，那么张量表示为

$$g^0_{ij} = \mathrm{d}x^1\otimes \mathrm{d}x^1 + \cdots + \mathrm{d}x^n \otimes \mathrm{d}x^n$$

一般地，可以令 $\{g_{ij}\}=A=\{a_{ij}\}$ 为正定对称阵，则

$$g_{ij} = a_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

且

$$g^A(X,Y) = X^T AY$$

我们用 $\mathrm{Sym}(m)$ 表示所有 $m\times m$ 的对称矩阵构成的线性空间 (同构于 $\mathbb{R}^{m(m+1)/2}$)，用 $\mathrm{PosSym}(m)$ 表示其中正定矩阵子集，它显然为一个开子流形. 由定义，任一光滑映射

$$g:\mathbb{R}^m \to \mathrm{PosSym}(m) \subset \mathrm{Sym}(m)$$

规定了一个 $\mathbb{R}^m$ 上的黎曼度量；反过来，任一 $\mathbb{R}^m$ 上的黎曼度量确定上述一个映射.这是线性代数中二次型理论的简单应用，上述矩阵 A 就是 Gram 矩阵.

例子 1.1.2. 对上半平面 $\mathbb{H}^2 := \{(x,y)|y>0\}$. 规定其上的黎曼度量为

$$g = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x\otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y\otimes \mathrm{d}y)$$

称为**双曲度量**，$(\mathbb{H}^2,g)$ 称为**双曲平面**.

¶ **构造黎曼流形**　下面我们介绍如何从已有的黎曼流形中构造新的黎曼流形.

1. 诱导度量　子流形几何中一个重要的技术是诱导度量. 设 $f:M^m\to N^{m+k}$ 为浸入，可以定义 M 上的拉回度量 f^*g_N 如下

$$(f^*g_N)_p(X_p,Y_p) := (g_N)_{f(p)}(\mathrm{d}f_p(X_p),\mathrm{d}f_p(Y_p))$$

不难验证 f^*g_N 为 M 上的一个黎曼度量(其中 $f^*g_N(X,X)=0 \Longrightarrow X=0$ 依赖于 $\mathrm{d}f$ 在每点是一个单射，即浸入.).

定义 1.1.3. 称 f^*g_N 为 M 上的一个关于 f 的**诱导度量**，此时 f 是一个**等距浸入**，若 f 是嵌入，则称等距嵌入.

[9]有时我们省略记号 g.

一个特别的情形是：(N, g_N) 为黎曼流形，M 为其浸入子流形，并且有含入映射 $i : M \subset N$ 是一个浸入. 此时 M 上有自然的关于 i 的诱导度量 $i^* g_N$，其为 g_N 在 $TM(\subset TN)$ 上的限制 $g_N|_M$.

定义 1.1.4. 称 $(M, i^* g_N)$ 为 (浸入) **黎曼子流形**[10].

注记 1.1.2. 事实上，古典微分几何中研究的曲线、曲面所计算的 *(*原本就有的*)*“黎曼度量”都是诱导度量，即视为欧式空间的浸入子流形.

例子 1.1.3. 令 $M = S^1$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周，选择一个坐标卡：用 θ 参数化 S^1，即

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

其中 $0 < \theta < 2\pi$. 那么我们有 $dx = -\sin\theta, dy = \cos\theta$. 从而 S^1 上关于 $i : S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 的诱导度量为

$$g_{S^1} = (\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y)|_{S^1} = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta$$

例子 1.1.4. 令 $M = S^2$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的单位球面，选择一个坐标卡：用 θ, z 参数化 S^2，即

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-z^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{1-z^2}\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

其中 $0 < \theta < 2\pi, -1 < z < 1$. 那么我们有诱导度量

$$g_{S^2} = \frac{1}{1-z^2}\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z + (1-z^2)\mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta$$

称为 S^2 的 round **度量**. 若利用经纬度参数化球面，同样得到诱导度量.

注记 1.1.3. 事实上，对任一 n 维球面 S^n 上有 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准度量 g^0 的诱导度量.

2. 乘积度量　设 $(M^m, g_M), (N^n, g_N)$ 为黎曼流形，定义乘积流形 $M \times N$ 上的黎曼度量 $g_{M\times N}$ 如下：
对任意 $(p, q) \in M \times N$ 以及 $X_{(p,q)}, Y_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(M \times N)$，规定

$$g_{M\times N(p,q)}(X_{(p,q)}, Y_{(p,q)}) := (g_M)_p(\mathrm{d}\pi_1 X_{(p,q)}, \mathrm{d}\pi_1 Y_{(p,q)}) + (g_N)_q(\mathrm{d}\pi_2 X_{(p,q)}, \mathrm{d}\pi_2 Y_{(p,q)})$$

其中 π_1, π_2 为典范投影. 写成矩阵为如下分块对角

$$\begin{pmatrix} (g_M)_{m\times m} & 0 \\ 0 & (g_N)_{n\times n} \end{pmatrix}$$

定义 1.1.5. 称 $(M \times N, g_{M\times N})$ 为**乘积黎曼流形**.

[10] 一些教材中称“嵌入”的情形为黎曼子流形.

例子 1.1.5. 环面 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$，取 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 上的诱导度量 g_{S^1}，如上构造乘积度量

$$g_{T^n} = \mathrm{d}\theta^1 \otimes \mathrm{d}\theta^1 + \cdots + \mathrm{d}\theta^n \otimes \mathrm{d}\theta^n$$

我们称 (T, g_{T^n}) 为**平坦环面**.

例子 1.1.6. 设 $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ 为单位实心开球，其上可定义黎曼度量

$$g = \frac{4}{[1 - \sum_{i=1}^n (x^i)^2]^2} \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$$

称为单位球的 Poincaré **度量**，参见 [16]. 特别地，当 $n = 2$ 时，(B^2, g) 与前文中的双曲平面 $(\mathbb{H}, g)$ 是同一个流形.

3. 共形度量　设 (M, g) 为一黎曼流形，对任一光滑函数 $u : M \to \mathbb{R}$，定义 $e^{2u}g$ 为

$$e_p^{2u} g(X_p, Y_p) := e^{2u(p)} g_p(X_p, Y_p)$$

为 M 上新的黎曼度量. 请读者思考：为什么选取因子 e^{2u}？

定义 1.1.6. 称黎曼度量 g' 与 g 是**共形的**，如果存在 M 上的光滑函数 u 使得

$$g' = e^{2u} g$$

容易发现共形的黎曼度量保持切空间向量的夹角，因此是保角的.

1.1.3　等距变换

回忆曲面论中的等距，意为保持第一基本形式不变的变换. 当我们给定流形的度量，就可以定义流形之间的等距变换.

定义 1.1.7. 设 $(M, g_M), (N, g_N)$ 为黎曼流形，称微分同胚[11] $f : M \to N$ 为**等距变换**，如果

$$f^* g_N = g_M$$

即 $(g_M)_p(X, Y) = (g_N)_{f(p)}(\mathrm{d}f_p(X), \mathrm{d}f_p(Y))$.

注记 1.1.4. 注意到经典微分几何中曲面是局部的概念，可以退而求其次在流形层面规定局部的等距. 即对任意 $p \in M$，存在 p 的一个邻域 U 使得

$$f : U \to f(U)$$

是一个微分同胚且 $f^* g_N = g_M$.

黎曼几何是一门**内蕴**几何学，因此在黎曼几何范畴中我们默许等距的黎曼流形是“等价的”.

例子 1.1.7. 欧氏空间 $(\mathbb{R}^m, g^0)$ 与 $(\mathbb{R}^m, g^A)$ 是等距的.请读者显式写出这个等距映射！

[11] 本小册中如不加说明，默认微分同胚是光滑同胚.

例子 1.1.8. 令 $M=\mathbb{R}_{>0}\times(0,2\pi)$，规定黎曼度量

$$g=\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r+r^2\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta$$

构造映射

$$f:M\to\mathbb{R}^2-\{(x,0)|x>0\},\quad 其中\ (r,\theta)\to(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

这里 $\mathbb{R}^2-\{(x,0)|x>0\}$ 装备标准欧式度量. 容易验证 f 是一个等距变换，实际上是实平面的极坐标表示.

例子 1.1.9. 视 $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$，那么典范投影 $(\mathbb{R}^n,g^0)\to(T^n,g^0)$ 是一个局部等距，但不是整体等距.

¶ **等距变换群**　容易发现等距变换 f 的全体构成一个群，以下我们考虑黎曼流形 (M,g) 到自身的变换. 规定记号

$$\mathrm{Isom}(M,g)=\{f:(M,g)\to(M,g)|f\ 是等距变换\}$$

$$\mathrm{Diff}(M)=\{f:M\to M|f\ 是微分同胚\}$$

显然 Isom $\subset$ Diff. 我们称 $\mathrm{Isom}(M,g)$ 为黎曼流形 (M,g) 的**等距变换群**. 此后大部分的讨论可以只限于“视等距同构一致的意义下”，即对黎曼流形作“商”：M/Γ，其中 $\Gamma\in\mathrm{Isom}(M)$.

例子 1.1.10. $(\mathbb{R}^m,g^0)$ 的等距变换群称欧式群，即 $E(m)=O(m)\ltimes\mathbb{R}^m$.

例子 1.1.11. (S^2,g_{S^2}) 的等距变换群为正交变换群 $O(3)$.

1.1.4　黎曼度量的存在性

¶ **黎曼度量总是存在**　黎曼度量是可以被任一微分流形 ($Hausdorff$ 且 C_2 可数) 整体定义的，为此要用到单位分解的技术，我们有如下定理:

定理 1.1.1 (黎曼度量的存在性). 微分流形 M 上总存在一个黎曼度量.

证明参见 [15] 的 P92-93. 事实上也可以通过取诱导度量的方式来证明之. 这需要用到 Whitney 于 1936 年得到的结果，即 Whitney 嵌入定理，参见 [13]，它表述为：任一 m 维微分流形 M 可嵌入 $2m+1$ 维的欧式空间作为其子流形. 于是可以规定诱导度量为 $g=f^*g^0$，其中 $f:M\to\mathbb{R}^{2m+1}$. 但一般给定黎曼流形 (M,g_M)，度量 g_M 与 f^*g^0 不同，为此 J.Nash 有更强嵌入定理，即 $Nash$ 嵌入定理，参见 [10]，它表述为：任一黎曼流形 (M,g_M) 可以等距地嵌入充分大维数的欧氏空间 $\mathbb{R}^N$，即 $g_M=f^*g^0$. 当 M 紧致时，可取 $N=\frac{m(3m+11)}{2}$；当 M 非紧时，可取 $N=\frac{m(m+1)(3m+11)}{2}$.[12]

注记 1.1.5. 对紧黎曼流形，Gromov 在 *1986* 年的工作中将这个维数改进为如下，参见 *[3]*.

$$N=\frac{m^2+5m+6}{2}$$

此后，Günther 于 *1989* 年进一步将维数改进为

$$N=\max\{\frac{m^2+5m}{2},\frac{m^2+3m+10}{2}\}$$

特别地，当 $m=2$ 时，我们知道最低的等距嵌入维数是 10，优于 Nash 时期的 17。

[12]事实上，我们这里提到的是 C^∞ 等距嵌入，而任何 m 维紧黎曼流形总是存在到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 的 C^1 等距嵌入，即 Nash – küiper 定理，参见 [9].

¶ 黎曼度量确实是“度量”　容易发现，一个流形的黎曼度量不唯一. 若 g_1, g_2 都为 M 的黎曼度量，那么 $ag_1 + bg_2 (a, b > 0)$ 为 M 的黎曼度量. 事实上，我们可以定义全体黎曼度量的集合 $\mathrm{Riem}(M)$，集合论意义下它是一个凸锥.

一个自然的问题是：给定一个流形，能否找到一个“合适的”黎曼度量，使得一些几何量变得容易研究？这是黎曼几何中其中一个主要的研究对象. 因此，在黎曼几何范畴中，我们需要定义一系列“度量不变量”，例如曲率，并且研究这些不变量与流形拓扑之间的关系.

必须指出的是，我们规定的 g 目前还不能称为严格意义上的“度量”，度量的含义是一个 M 上的距离函数 d，满足

1. 正定性：$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \forall x, y \in M$；
2. 对称性：$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$；
3. 三角不等式：$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$

因此我们需要在流形 (M, g) 上规定一个满足以上性质的距离函数 d，并且其直接来自于黎曼度量 g. 为此先定义流形上正则曲线 $\gamma : [0, 1] \to M$ 的**长度**，即

$$s(t) = \int_0^t < \gamma'(t), \gamma'(t) >_{\gamma(t)}^{1/2} \mathrm{d}t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

利用一阶微分形式不变性不难看出 $s(t)$ 与参数的选取无关，与古典微分几何类似，可以定义弧长参数 s，并且其满足切向量为单位向量，再记 $L[\gamma] = s(1)$ 表示曲线**弧长泛函**.

因此，任一正则曲线间存在等距变换 (请读者证明之)，即一维流形的内蕴几何是平凡的. 换言之，一维流形无黎曼几何.

注记 1.1.6. 上述讨论可以自然推广到分段正则曲线上.

于是我们定义**黎曼距离**(函数)d 为

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) | \gamma \in \Omega_{p,q}\}$$

其中 $\Omega_{p,q} := \{\gamma : [0, 1] \to M | \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$. 我们断言上述定义的 d 是一个度量，读者自行验证度量函数的三条性质，只有 $d(p, q) = 0 \Longrightarrow p = q$ 是非平凡的，证明参见 [15] 的 P94-96. 得到以下定理:

定理 1.1.2. 距离函数 d 使 (M, d) 成为一个度量空间.

我们这里提供另一种证明，参见 [5].

证明. 我们要证明：$p \neq q \Longrightarrow d(p, q) > 0$. 注意到 M 是 C_2 的，选取一个坐标邻域 $(p \in)U$ 使得 $q \notin U$. 并且记 $\varphi(U) = B_1(0) =: V, \varphi(p) = 0$. 利用 φ 诱导 V 上的度量

$$h := (\varphi^{-1})^* g$$

于是 φ 为 (U, g) 与 (V, h) 之间的等距. 令

$$\lambda := \inf\{h_{ij}(x) \text{ 的最小特征值} | x \in \overline{B_{1/2}(0)}\} > 0$$

于是估计

$$< X, X >_h \geq \lambda < X, X >_{g^0}, \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

对任一连接 p, q 的曲线 γ，总能找到 $\varphi(\gamma)$ 与 $\partial B_{1/2}(0)$ 的第一个交点，称曲线连接 p 与该交点的部分为 $\varphi(\tilde{\gamma})$，于是重新参数化意义下有弧长估计

$$L_h[\varphi(\gamma)] \geq L_h[\varphi(\tilde{\gamma})] = \int_0^1 < \varphi(\tilde{\gamma}), \varphi(\tilde{\gamma}) >_h^{1/2} \mathrm{d}t \geq \sqrt{\lambda} \int_0^1 < \varphi(\tilde{\gamma}), \varphi(\tilde{\gamma}) >_{g^0}^{1/2} \mathrm{d}t \geq \frac{\sqrt{\lambda}}{2} > 0$$

等距拉回到 M 上，显然有 $d(p, q) > 0$. □

例子 1.1.12. 考察双曲平面 $(\mathbb{H}, g)$ 上的黎曼距离. 对 $p = (0, a), q = (0, b)$，$b > a > 0$. 任取 $\gamma \in \Omega_{p,q}$，于是有

$$L[\gamma] = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{y(t)^2}(x'(t)^2 + y'(t)^2)} \mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} \mathrm{d}t = \log \frac{b}{a}$$

因此双曲平面上 y 轴的两点距离可以用 $d(p, q) = \frac{b}{a}$ 来刻画.

注记 1.1.7. 根据以上的讨论我们知道：给定黎曼流形间的等距变换 $\varphi : (M, g_M) \to (N, g_N)$，并且 d_M, d_N 为由各自黎曼内积诱导的距离函数. 显然 φ 是**保距离的**，即

$$d_N(\varphi(p), \varphi(q)) = d_M(p, q), \quad \forall p, q \in M$$

事实上反过来也成立. 读者可以参考 Myers 和 Steenrod 于 *1939* 年的工作，参见 *[8]*. 我们叙述以下定理：

定理 1.1.3 (Myers – Steenrod，1939)**.** 在上述设定下，若 $(M, d_M) \to (N, d_N)$ 是保距离的满射，那么它是等距同构.

因此所谓“等距”的概念有两个含义，即黎曼度量与距离函数的一致. 上述定理被 Palais 优化，即

定理 1.1.4 (Palais,1959)**.** 黎曼流形诱导的距离函数可以反过来决定流形的 *(*微分*)* 结构与黎曼度量.

读者不妨再进一步思考：若直接给定黎曼流形的距离函数，使它称为度量拓扑，那么这个距离函数能诱导黎曼度量 g 吗？ 答案是否定的. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的“曼哈顿距离”，两点之间的曼哈顿连线有无数多条 *(*都是最短的*)*，而我们将会说明在充分小邻域内最短线是唯一的，即测地线.

¶ 度量拓扑与流形拓扑的一致性 从拓扑学上看，我们不希望几何中研究的对象呈现两种拓扑，在一致的拓扑下讨论问题总是尽如人意. 一个“惊喜”的观察是:

定理 1.1.5. 黎曼流形 (M, g) 的度量函数 d 诱导的拓扑 *(*度量拓扑*)* 与流形本身的拓扑是一致的.

证明同样参见 [15] 的 P94-96.

注记 1.1.8. 这个事实告诉我们*:* 从拓扑结果上看，装备了度量结构的黎曼流形 M 相比流形 M 本身并无差异.

关于这个定理，我们给出另一种证明，以说明分析学的方法在流形上的应用. 为此先证明一个引理.

引理 1.1.1. 固定 p 点，规定流形 M 上的函数 $f(q) := g(p,q)$，那么 $f(p)$ 在流形拓扑的意义下是连续函数.

证明. 注意到 M 是 C_2 的，主要证明 f 依序列连续即可. 即

$$q_i \to q \Longrightarrow f(q_i) \to f(q)$$

即可. 又注意到 $|f(q_i) - f(q)| \le d(q_i, q)$，于是只要证明 $q_i \to q$ 时，有 $d(q_i, q) \to 0$ 即可. 规定 $\varphi(U) = B_1(0), \varphi(q) = 0$，注意到收敛性可以刻画为存在 N，对任意 $i > N$，都有 $\varphi(q_i) \in B_{1/N}(0)$. 取

$$\Lambda := \sup\{h_{ij}(x) \text{ 的最大特征值} | x \in \overline{B_{1/2}(0)}\}$$

显然有估计

$$< X, X >_h \le \Lambda < X, X >_{g^0}$$

我们取从 $\varphi(q)$ 到 φq_i 的直线段 $\tilde{\varphi}_i(t) := t\varphi(q_i)$，对于 $i > N$，有

$$L_h[\tilde{\gamma}_i] \le \frac{\sqrt{\Lambda}}{k}$$

令 $k \to \infty$ 即可. □

注记 1.1.9. 从三角不等式中可以看出函数 f 不光是连续的，还是 Lipschitz 连续的. 但这个函数一般不光滑. 在欧式空间中，我们会发现 p 本身是不可导点*(若考虑 f^2 可以消除不可导性.)*. 以后我们将说明：在充分小的 p 的去心邻域内是光滑的.

最后我们来证明这个定理.

证明.

1. 由函数 $f(q)$ 的连续性可知，度量拓扑意义下的开集被拓扑流形的开集包含.请读者思考为什么？

2. 对流形拓扑下的开集 U，总是可以利用分离性找到两点 p, q 使得 $p \in U, q \notin U$，与引理类似的方法，可以在利用局部欧氏空间的度量分离两点，再通过等距同构拉回到流形上，找到分离二者的并且在 U 内部的度量开集.

□

注记 1.1.10. 我们称上述度量球

$$B_r(p) := \{q \in M | d(p,q) < r\}$$

为**测地球**. 对于充分小的 r，它具有欧式的拓扑性质，但当 r 比较大时，它的拓扑变得复杂.

1.2　黎曼测度与实分析

1.2.1　黎曼测度

回忆分析学中利用测度来规定积分，而这里黎曼流形可以利用黎曼度量给出一种测度，进而分析学(特别是函数论与实分析)，我们来叙述之. 给定黎曼流形 (M^m, g) 以及切空间上一组单位正交基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$，定义其为正向，并且张成平行六面体的体积为

$$\mathrm{vol}(e_1, \cdots, e_m) = 1$$

又注意到对自然基 $\{\partial_1, \cdots, \partial_m\}$ 有基变换 $\partial_i = a_i^j e_j$，于是

$$g_{ij} =< \partial_i, \partial_j >= \sum_k a_i^k a_j^k = A^T A, \quad A = (a_{ij})$$

记 $G = \det(g_{ij})$[13]，我们有

$$\mathrm{vol}(\partial_1, \cdots, \partial_m) = \det(A^T A)\mathrm{vol}(e_1, \cdots, e_m) = \sqrt{G}$$

将讨论限制在一个坐标卡 (U, φ) 内，取 U 的紧子集 K，定义 K 的**体积**为

$$\mathrm{vol}(K) := \int_{\varphi(K)} \sqrt{G}\varphi^{-1}\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m = \int_K \sqrt{G}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$$

往后默认积分都是流形上的，因此采用上式第二个等号的表达. 其中 $\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m$ 表示欧氏空间中的 Hausdorff 测度，$\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$ 表示拉回以后的测度，并且 $\sqrt{G}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$ 称为**黎曼体积元素**.

利用积分的变量替换可以验证上述体积的定义与坐标卡的选取无关，参见 [15]. 接下来将这个紧集 K 的体积推广到整体，为此需要选择流形局部有限的坐标卡覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，并且 $\{\rho_\alpha\}$ 是从属于其的单位分解，于是

$$\mathrm{vol}(K) := \sum_\alpha \int_{K \cap U_\alpha} \rho_\alpha \sqrt{G}\mathrm{d}x_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\alpha^m$$

可以验证上述定义不依赖于单位分解的选取，参见 [15].

1.2.2　黎曼流形上的实分析

现设 $C_0(M)$ 为 M 上具有紧支集的连续函数环，对 $f \in C_0(M)$ 可定义

$$\int_M f = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha f \sqrt{G}\mathrm{d}x_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\alpha^m$$

由上述讨论可知，这个定义是良性的. 且 $\varphi \geq 0$ 蕴含

$$f \geq 0 \Longrightarrow \int_M f \geq 0$$

[13]往后若不加说明，默认 G 为黎曼度量的 *Gram* 矩阵.

于是我们得到一个正的线性泛函 $\Gamma : C_0(M) \to \mathbb{R}$，满足

$$\Gamma(f) \equiv \int_M f$$

由 Riesz 表示定理可知，在 M 上存在唯一的 Borel 测度 dvol 使得对任意 $f \in C_0(M)$，有

$$\int_M f = \int_M f\mathrm{dvol}$$

其中这里的 dvol$(= \sqrt{G}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m)$就是黎曼体积元素或者称为体积密度.往后我们直接记 $\mathrm{dvol} = \mathrm{dV}_g$.

注记 1.2.1. 在每个坐标卡内可以将上述积分视为对 $n-$ 形式 $\mathrm{d}V_g = \sqrt{G}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$ 的积分，当流形**可定向**时可以定义整体非零的 $n-$ 形式使得

$$\int_M f\mathrm{dvol} = \int_M f\mathrm{dV}_g$$

若选取上述幺正标架 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 的对偶场 $\{\omega^1, \cdots, \omega^m\}$，那么体积元表示为

$$\mathrm{dV}_g = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m$$

进而可以定义 $f \in C_0(M)$ 的 L^p 范数

$$||f||_{L^p} := \left(\int_M |f|^p\right)^{1/p}$$

特别地，当 $p = 2$，可以定义如下内积

$$< f, g >_{L^2} := \int_M f\overline{g}$$

使得 $L^2(M)$ 成为 Hilbert 空间. 至此，我们在黎曼流形上构造了一种函数空间，这为分析应用于几何的研究提供了条件。将来我们会看到，考察流形上的函数能一定程度上反映流形的几何.

1.3　散度定理

1.3.1　散度

我们已经知道如何在流形 M 上构造函数空间，下面考察一个特别的光滑函数. 设 X 为 M 的一个光滑向量场，定义一个 C^∞ 函数 $\mathrm{div}X$，称为 X 的**散度**.

定义 1.3.1. 向量场 X 的**散度** $\mathrm{div}X : M \to \mathbb{R}$ 是 M 的函数，满足

$$(\mathrm{div}X)\mathrm{V}_g = d(i(X)\mathrm{V}_g)$$

这里 $i(X)$ 为 V_g 的内乘积，即 $[i(X)\mathrm{V}_g](X_1, \cdots, X_{m-1}) = \mathrm{V}_g(X, X_1, \cdots, X_{m-1})$

这里 X 有表示 $X = X^i\partial_i$，易知

$$i(X)\mathrm{V}_g = \sum_i X^i\sqrt{G}(-1)^{i-1}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$$

进一步计算得到

$$d(i(X)) = \sum_i \partial_i(\sqrt{G}X^i)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$$

回忆定义，我们有

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(X^i\sqrt{G})$$

注记 1.3.1. 从上式可知，散度不依赖于流形的定向，不可定向流形也能定义向量场的散度. 特别地，当 $M = \mathbb{R}^m$ 时，$g_{ij} = \delta_{ij}$，我们有

$$\mathrm{div}X = \sum_i \partial_i$$

这就是经典的向量场散度.

利用 Cartan magic 公式，我们有

$$\mathcal{L}_X(\mathrm{V}_g) = i(X)d\mathrm{V}_g + d(i(X)\mathrm{V}_g) = \mathrm{div}X(\mathrm{V}_g)$$

这说明向量场的散度是体积元沿向量场的无穷小变化速率.

回忆微分流形中的 Stokes 公式，我们可得如下定理:

定理 1.3.1 (散度定理)**.** 设 X 为流形 M 具有紧支集的光滑向量场，则

$$\int_M \mathrm{div}X\mathrm{d}vol = \int_{\partial M} < X, \mathbf{n} > \mathrm{darea}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界 ∂M 的外法向，darea 是面积元.往后我们记为 dS_g.

特别地，若 $\partial M = \emptyset$，那么 $\int_M \mathrm{div}X\mathrm{dV}_g = 0$.

1.3.2　梯度

注意到一个特别的向量场，即一个函数的**梯度** $\mathrm{grad}f$. 回忆，对任意向量场 X，有

$$Xf =< X, \mathrm{grad}f >$$

于是在局部表示 $\mathrm{grad}f = F^i\partial_i, X = X^j\partial_j$ 下，可得

$$g_{ij}F^iX^j =< X, \mathrm{grad}f >= Xf = \partial_j fX^j$$

对比 X^j 前系数可知 $g_{ij}F^i = \partial_j f$，用 g^{jk} 拉上指标，我们有 $F^k = g^{jk}\partial_j f$，于是梯度被局部表示为

$$\mathrm{grad}f = (g^{ji}\partial_j f)\partial_i$$

注记 1.3.2. 当 $M=\mathbb{R}^m$ 时

$$\mathrm{grad}f=(\partial_1,\cdots,\partial_m)$$

就是经典的函数梯度.

事实上，黎曼流形上的函数梯度保留了欧氏空间的部分几何性质，例如梯度场与函数水平集 $f^{-1}(c)$(正交回忆 $0=Xf=<X,\mathrm{grad},f>$)，其中 c 为 f 的一个正则值. 同时，可以知道 $\mathrm{grad}f$ 是 df 的对偶，这是因为 $<X,\mathrm{grad}f>=Xf=df(X)$ 可以视为

$$g(X,\mathrm{grad}f)=g^*(df,X)$$

1.3.3　黎曼流形上的 Laplacian 算子

最后将函数梯度作为向量场取散度，我们得到一个重要的算子.

定义 1.3.2. 对任意 M 上的光滑函数 f，定义 Laplacian **算子**为

$$\triangle f:=\mathrm{div}(\mathrm{grad}f)$$

在局部坐标表示下，我们有

$$\triangle f=\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j f)$$

抽象出来，称

$$\triangle:=\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j)$$

为 Laplacian – Beltrami **算子**.

注记 1.3.3. 当 $M=\mathbb{R}^m$ 时，有

$$\triangle f=\sum_i\partial_{ii}f$$

这是经典的 Laplacian 算子.

带入散度定理，我们有

推论 1.3.1. 若 $\partial M=\emptyset$ 且 f 为 M 上具有紧支集的光滑函数，则

$$\int_M\triangle f=0$$

并且容易验证

$$\mathrm{div}(fX)=f\mathrm{div}X+<\mathrm{grad}f,X>$$

若令其中 $X=\mathrm{grad}g$，于是

$$\mathrm{div}(f\mathrm{grad}g)=f\triangle g+<\mathrm{grad}f,\mathrm{grad}g>$$

对 $\partial M=\emptyset$ 的情形应用散度定理，我们有

定理 1.3.2 (第一 *Green* 公式)**.**

$$\int_M f\triangle g\mathrm{dV}_g=\int_M g\triangle f\mathrm{dV}_g=-\int_M<\mathrm{grad}f,\mathrm{grad}g>\mathrm{dV}_g$$

不难发现欧氏空间的版本是其特殊形式，参见 [4].

参考文献

[1] Manfredo Perdigao Do Carmo and J Flaherty Francis. h-!C!C[u]Riemannian geometry, volume 2. Springer, 1992.

[2] Karl Friedrich Gauss. h-!C!C[u]General Investigations of Curved Surfaces: Edited with an Introduction and Notes by Peter Pesic. Courier Corporation, 2013.

[3] Mikhael Gromov. Isoperimetric inequalities in riemannian manifolds. h-!C!C[u]Asymptotic Theory of Finite Dimensional Spaces, 1200:114–129, 1986.

[4] Jurgen Jost. h-!C!C[u]Partial differential equations, volume 214. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Jürgen Jost and Jeurgen Jost. h-!C!C[u]Riemannian geometry and geometric analysis, volume 42005. Springer, 2008.

[6] John M Lee. h-!C!C[u]Introduction to Riemannian manifolds, volume 2. Springer, 2018.

[7] John M Lee and John M Lee. h-!C!C[u]Smooth manifolds. Springer, 2012.

[8] Sumner B Myers and Norman Earl Steenrod. The group of isometries of a riemannian manifold. h-!C!C[u]Annals of Mathematics, 40(2):400–416, 1939.

[9] John Nash. C 1 isometric imbeddings. h-!C!C[u]Annals of mathematics, 60(3):383–396, 1954.

[10] John Nash. The imbedding problem for riemannian manifolds. h-!C!C[u]Annals of mathematics, 63(1):20–63, 1956.

[11] Peter Petersen. h-!C!C[u]Riemannian geometry, volume 171. Springer, 2006.

[12] Bernhard Riemann. h-!C!C[u]On the hypotheses which lie at the bases of geometry. Birkhäuser, 2016.

[13] Hassler Whitney. The imbedding of manifolds in families of analytic manifolds. h-!C!C[u]Annals of Mathematics, 37(4):865–878, 1936.

[14] 伍鸿熙, 沈纯理, and 虞言林. h-!C!C[u] 黎曼几何初步. Gao deng jiao yu chu ban she, 2014.

[15] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, and 郭孝英. h-!C!C[u] 黎曼几何初步. 北京: 高等教育出版社, 1992.

[16] 龚昇. h-!C!C[u] 简明复分析. 中国科学技术大学出版社, 2009.

第二章　联络与曲率

2.1　仿射联络

2.1.1　线性联络的多种理解

¶ 向量丛上的联络：协变导数

¶ 向量丛上的联络：平行移动

¶ 联络的局部性质：仿射联络

2.2　Levi − Civita 联络

2.3　曲率

第三章　附录

3.1　经典微分几何

旨趣　这一节中我们回顾经典微分几何的理论.

3.1.1　第一、二基本形式

¶ 第一基本性质　设 M^m 为 $\mathbb{R}^{m+k}$ 的嵌入子流形. 不妨记嵌入为

$$\varphi : U(\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^{m+k}$$

其中 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中开集，即 M 的参数域，参数为 $(x^1, \cdots, x^m)$. 并且记切向量为

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad i = 1, \cdots, m$$

设切空间为 $T_{\varphi(x)}M = \mathrm{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$. 称微分同胚 $\gamma = \varphi \circ u$ 为 M 上正则曲线[1]，其中 $u : I = [0,1](\subset \mathbb{R}) \to U, u = (u^1, \cdots, u^m)$. 于是有

$$\gamma' = \frac{\mathrm{d}(\varphi \circ u)}{\mathrm{d}t} = \varphi_i \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}$$

这里 γ 的弧长表示为

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'| \mathrm{d}t$$

设 $\mathrm{d}\gamma$ 为 γ 的切映射，我们有 $\mathrm{d}\gamma(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) = (\mathrm{d}u^i/\mathrm{d}t)\varphi_i$，且记 $v^i = \mathrm{d}u^i/\mathrm{d}t$，并且[2]

$$g_{ij} = <\varphi_i, \varphi_j>_{\mathbf{E}^{m+k}}$$

于是

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = |\gamma'|^2 = g_{ij} v^i v^j$$

对任意 $v = v^i \varphi_i, w = w^j \varphi_j \in T_{\varphi(t)}M$，我们规定**第一基本形式**为

$$I(v, w) = g_{ij} v^i w^j$$

[1]即光滑且切向量不为零，即 $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t \neq 0$. 往后我们默认术语“光滑”、“正则”都表示正则曲线，有时直接称曲线.

[2]注意到这里的内积 $< -, - >_{\mathbf{E}^{m+k}}$ 是欧氏空间的自然内积，往后忽略下标.

¶ **第二基本形式**　再考察曲线的二阶导

$$\gamma'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}(\varphi \circ u)}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 u^i}{\mathrm{d}t^2}\varphi_i + \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\varphi_{ij}$$

设法空间 $N_{\gamma(t)}M = (T_{\gamma(t)}M)^{\perp}$. 并记

$$h_{ij} = \mathrm{Proj}_{N_{\gamma(t)}M}(\varphi_{ij})$$

为向量 φ_{ij} 在法空间 $N_{\gamma(t)}M$ 上的投影. 于是

$$\mathrm{Proj}_{N_{\gamma(t)}M}(\gamma'') = h_{ij}v^i v^j$$

我们取弧长参数 s，令 $v^i = \mathrm{d}u^i/\mathrm{d}s$，由于 $g_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} = 1$，故

$$h_{ij}v^i v^j = \kappa \mathrm{Proj}_{N_{\gamma(t)}M}(n)$$

其中 κ 为曲线 γ 的曲率，n 为其主法向量. 对任意 $v = v^i\varphi_i, w^j\varphi_j \in T_{\gamma(t)}M$，规定**第二基本形式**为

$$II(v,w) = h_{ij}v^i w^j$$

注记 3.1.1. 必须指出，注意到余维数 $\mathrm{codim}M = k$，当 $k=1$ 时即为超曲面，此时第二基本形式就是经典的 $\mathbb{R}$ 值二次型形式；$k>1$，此时的第二基本形式 $h_{ij}v^i w^j$ 就是 $N_{\gamma(t)}M$ 值二次型.

¶ Christoffel **符号**　由于 $\varphi_{ij} - h_{ij} \in T_{\gamma(t)}M$，不妨设

$$\varphi_{ij} = \Gamma^k_{ij}\varphi_k + h_{ij}$$

同时有

$$<\varphi_{ij}, \varphi_k> = \Gamma^l_{ij}g_{lk}$$

注意到 $\partial_j <\varphi_i, \varphi_k> = <\varphi_{ij}, \varphi_k> + <\varphi_i, \varphi_{jk}>$，易得

$$<\varphi_{ij}, \varphi_k> == \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

用 g^{ij} 拉上指标，有

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

称 Γ^k_{ij} 为 Christoffel **符号**. 回到曲线的二阶导，我们有

$$\gamma'' = \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\right)\varphi_i \bmod N_{\gamma(t)}M$$

3.1.2　测地线与协变导数

根据上述的讨论我已经知道，弧长参数 s 下，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\right)\varphi_i=\kappa\mathrm{Proj}_{T_\gamma M}(n)$$

定义曲线 γ 的**测地曲率**为

$$k_g=\left|\left(\frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\right)\varphi_i\right|$$

若 $k_g\equiv 0$，称曲线为**测地线**. 一般地，取任意向量场 $X=X^i\varphi_i\in\Gamma(TM)$，定义沿着曲线 γ 的**协变导数**为

$$\frac{DX}{\mathrm{d}t}=(\partial_kX^i+\Gamma^i_{jk}X^j)\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\varphi_i \mod N_{\gamma(t)}M$$

3.1.3　黎曼曲率

前面我们都是在切丛上讨论问题，下面考察法丛上的导数. 对 $N_{\varphi(x)}\in N_{\varphi(x)}M$，记 Weingarten 系数为

$$\partial_iN=N_i^k\varphi_k \mod N_{\varphi(x)}M$$

由 $<N,\varphi_j>=0$，可得 $<\partial_iN,\varphi_j>+<N,\varphi_{ij}>=0$. 于是

$$N_i^k=-<h_{ij},N>g^{jk}$$

因此

$$\partial_iN=-<h_{ij},N>g^{jk}\varphi_k \mod N_{\varphi(x)}M$$

将这个公式应用于 h_{ij}，我们有

$$\varphi_{kij}=\partial_k\varphi_{ij}=(\partial_k\Gamma^m_{ij}+\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk}-<h_{ij},h_{kl}>g^{lm})\varphi_m \mod N_{\varphi(x)}M$$

注意到 $\varphi_{kij}=\varphi_{jik}$，于是

$$\partial_j\Gamma^m_{ik}-\partial_k\Gamma^m_{ij}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj}-\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk}=(<h_{ik},h_{jl}>-<h_{ij},h_{kl}>)g^{lm}$$

定义黎曼记号为

$$R^m_{ijk}=\partial_j\Gamma^m_{ik}-\partial_k\Gamma^m_{ij}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj}-\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk}$$

用 g_{ij} 拉下指标，有

$$R_{ijkl}=R^m_{ijk}g_{ml}$$

于是 $R_{ijkl}=<h_{ik},h_{jl}>-<h_{ij},h_{kl}>$，容易观察到对称性 $R_{ijkl}=R_{lijk}=R_{klij}=R_{jkli}$. 定义一个 $(0,4)$ 型张量，对任意 $X=X^i\varphi_i,Y=Y^i\varphi_i,Z=Z^i\varphi_i,W=W^i\varphi_i\in\Gamma(TM)$

$$R(X,Y,Z,W)=R_{lijk}X^lY^iZ^jW^k$$

称 R 为**黎曼曲率张量**. 利用对称性可以定义

$$\frac{R(X,Y,X,Y)}{<X,X><Y,Y>-<X,Y>^2}$$

称为切子空间 $\mathrm{span}\{X,Y\}$ 的**截面曲率**. 注意到我们一共有 $m(m-1)/2$ 个这样的截面曲率.

3.2 Ricci 流简介