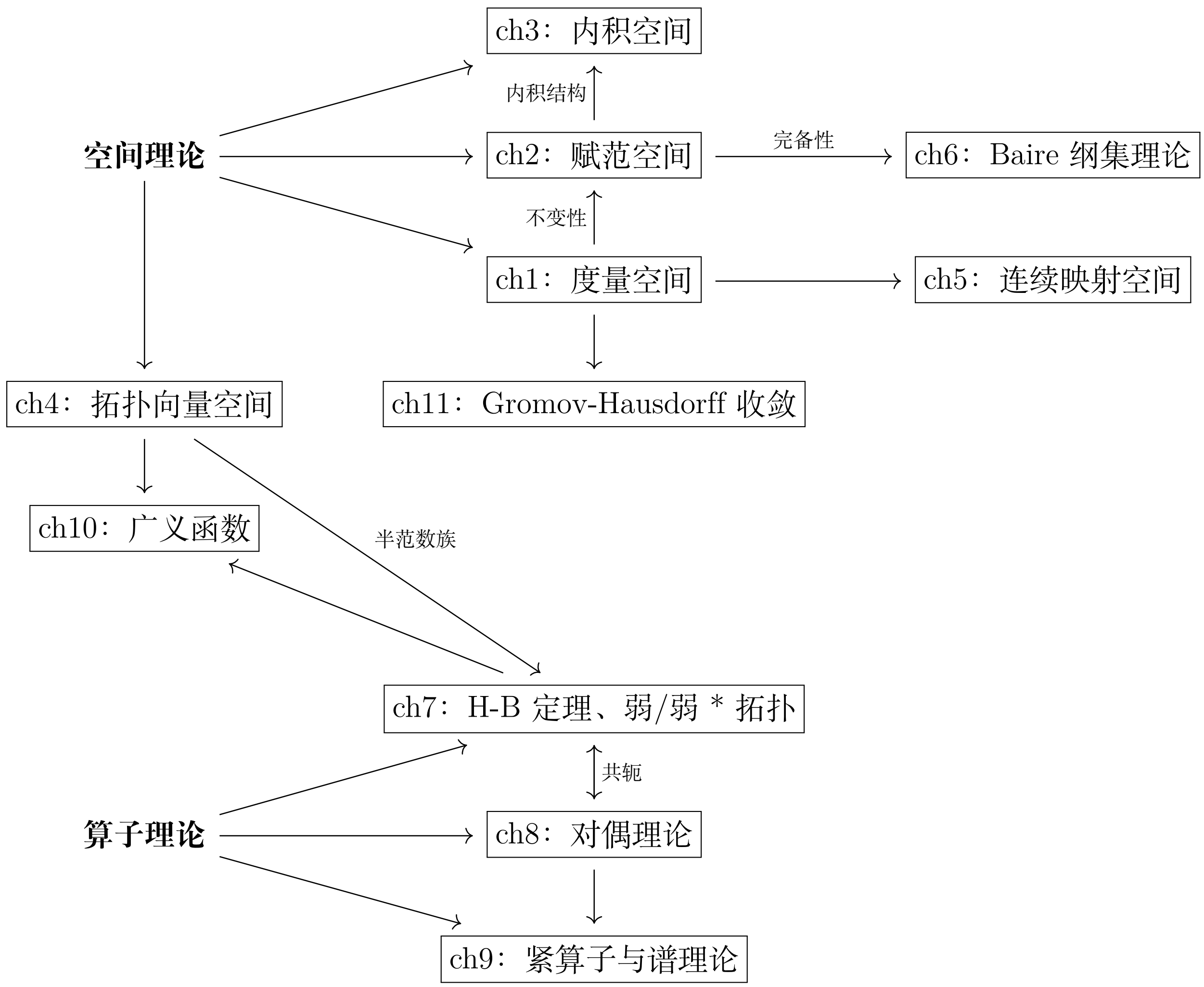
泛函分析

钱振烨

图 1. Otto Nikodym and Stefan Banach

A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories. One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies.

——Stefan Banach


ch3：内积空间
内积结构
空间理论
ch2：赋范空间
完备性
ch6：Baire 纲集理论
不变性
ch1：度量空间
ch5：连续映射空间
ch4：拓扑向量空间
ch11：Gromov-Hausdorff 收敛
ch10：广义函数
半范数族
ch7：H-B 定理、弱/弱 * 拓扑
共轭
算子理论
ch8：对偶理论
ch9：紧算子与谱理论

第一版前言. 泛函分析一般作为本科高年级的分析课程，我们希望通过在基本的分析课程：Fourier 分析、实分析与复分析，以及基本的微分方程课程：常微分方程与动力系统、偏微分方程中积累大量的分析对象的例子以及技术，最后在泛函分析的课程中得到高观点的一般化讨论. 因此，基于研究对象的不同，将基础的泛函分析分成两大部分：

- 空间理论
- 算子理论

分别对应这份讲义的第一、三部分. 此外，我们需要加入抽象理论的具体应用，讲义的第二部分着重研究了一类特殊的度量空间 (连续函数空间) 以及空间完备性的进一步讨论 (Baire 纲集理论)；并且基于笔者的兴趣，在第四部分添加了广义函数空间和 Gromov-Hausdorff 收敛的应用. 这是因为泛函分析的思想并不仅仅限制在分析与微分方程理论的观点，还可以将方法论沿用到现代几何学和物理.

1. 泛函分析可以理解为 "拓扑空间上的分析"，因此我们默认读者已经掌握了点集拓扑的基本内容，本小册不再对基本的拓扑概念做回顾, 重要的结论: 例如 Urysohn 度量化定理 (第4章中会利用度量化原理来说明部分半赋范局部凸空间是否可度量化已经度量是否完备，见命题3.1)；拓扑性质在乘积意义下的保持 (见第1章)，其中相对重要的是完备性的保持和紧性的保持 (特别注意紧性的保持可以针对不可数个空间，即 Tychonoff 定理，见定理1.3)，在第8章中将用于说明乘积空间 $\mathbb{K}^{\overline{B_E}}$ 的紧性以此与弱 * 拓扑联系；第5章中的逐点收敛、(紧) 一致收敛都有相应的拓扑对应，我们并未给出叙述，读者需要知晓；最后，还应该熟悉拓扑空间邻域基的刻画，我们将在第4章中以邻域系的语言代替度量叙述，这是学习拓扑向量空间比不可少的一关，初学者不应该畏惧！拓扑的大部分事实我们都参考了 [**12, 26**].
2. 古典分析乃至实复分析中大部分使用的 $\epsilon - \delta$ 语言依托于底层空间 (一般是 $\mathbb{R}^n$，$\mathbb{C}^n$，$\mathcal{L}^p$，C_c^∞) 度量的存在性，因此讲义的前三章都限制在带度量拓扑的空间讨论. 其中度量空间中最重要的概念当属完备性，它被刻画为 "小子集的性质" (见

第1章的 Cauchy-Cantor 定理 (定理1.4)). 之所以重要是因为完备的空间在序列收敛性的操作上是有技术优势的，经验总结来看：序列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 可以仅依靠刻画“直径 diam”的收敛来说明收敛；不完备的空间可以被完备化 (见定理1.7)，并且原空间是嵌入的稠密子空间；此外，完备空间中一个重要的方法是压缩映射原理，以此可以给出 Banach 不动点定理 (见定理2.1)：函数空间中出现的极值问题通过 Fermat's principle 可以转化为取等，进而抽象为如下泛函方程

$$T[f] = 0$$

的解的唯一性问题，此时若我们能够证明泛函 T 是压缩的，那么配合空间的完备性可以说明存在达到极值的函数，这是变分法的内涵. 我们将利用这个技术解决常微分方程中的唯一解问题，见问题10.

3. 更重要的空间是赋范线性空间，其上有与线性结构兼容的度量结构，这使得元素做代数运算来研究拓扑更加便利，而事实上大部分函数空间都是赋范的. 读者可以将赋范空间的理论理解成线性代数中有限维线性空间理论的推广，一个本质的差异就是范数意义下的拓扑使得闭单位球不是紧球，这是著名的 Riesz 定理 (见定理1.3)，我们将在第8章中利用弱 * 拓扑来规避这种刚性. 另一个结构更丰富的空间是内积空间，首要的区别是这类空间可以合理定义向量的夹角，即 Cauchy-Schwarz 不等式 (见第3章定理1.1). 有了角度的概念进而可以做正交分解，我们将说明 Hilbert 空间是可做正交分解的，见定理2.1，这个观点在现代数学的很多分支中都有应用，例如实分析中 $\mathcal{L}^2$ 上测度的分解 (参见 [**3**])、几何学中的 Hodge 理论本质上就是将平方可积的微分形式空间将调和形式分解出来 (参见 [**13, 23, 27**]) 等等. 其次，在 Hilbert 空间中对偶理论更简洁，这个观察来自于 $\mathcal{L}^2$ 空间的指数自共轭以及实分析中的 Riesz 表示定理，参见 [**3, 16**]，我们发现 Hilbert 空间也有类似的表示定理，它被叙述为

$$H \cong H^*$$

即 Hilbert 空间与其对偶空间等距同构 (见定理3.2)！这个结果使得其上的共轭算子表达更加简单 (因为我们忽略了 H 与 H^* 的差异), 见定理3.3. 此外, 我们将证明 Hilbert 空间甚至具有类似有限维线性空间的简单结构，事实上，每个 Hilbert 空间可以被简单地等距同构为 $l^2(I)$，其中 I 为其中完备正交系的指标集. 基于这个事实，我们可以进一步研究一维 Fourier 分析，可以证明空间 $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 的完备正交系为三角级数 (三角基，见第3章定义4.3)

$$\cdots, e^{-inx}, \cdots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \cdots, e^{inx}, \cdots$$

这是 Fourier 级数理论的重要成果. 注意，其中正交系的完备性我们用到了分析中好核恒等元逼近的技术，参见 [**19, 16**]，而第5章中还会给出利用 Stone-Weierstrass 定理 (见定理2.2) 的简单证明，这是古典 Weierstrass 第一第二定理的推广，即研究连续函数代数的稠密子代数. 关于连续函数代数我们不妨多说一点. 第5章中我们将介绍最广义的 Ascoli 定理 (见定理1.1), 这个定理的思想是利用一个等度连续的概念将算子族的逐点收敛性提高到有类似一致收敛性的效果，事实上在实分析中可以利用测度连同 Egorov 定理或 Lusin 定理在损失一个可控小测度的意义下直接提升到好的结果，参见 [**3, 16**].

4. 我们进一步谈赋范空间的完备性. 第6章中基于 Banach 空间的完备性推广了 Baire 早期提出的纲集理论，我们把满足“G_δ-集稠密”的空间统一称为 Baire 空间. 利用 Baire 纲定理 (见定理1.2) 可以证明两个关于算子的重要定理，即 Banach-Steinhaus 定理和开映射定理, 见定理2.1和定理3.1, 是说一族算子的逐点有界性可以刻画整体 (一致) 的有界性并且 Banach 空间之间的有界算子是开的. 我们将利用这套理论说明古典分析中一系列结果，例如 Fourier 级数收敛的连续函数、连续但处处不可导函数的病态函数是大量存在的；Fourier 分析中 Dirichlet 核对应的 Fourier 变换算子族的无界性会导致“奇点聚集”，这是 Fourier 分析理论有趣的地方；以及 Fourier

变换算子

$$\mathcal{F}:\mathcal{L}_{2\pi}^{1}\to c_0(\mathbb{Z})$$

是单射但不是满射,其中单射性质蕴含著名的 Riemann-Lebesgue 引理，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\to 0,\quad \forall f\in\mathcal{L}_{2\pi}^{1}$$

见定理2.3.

5. 以上都是带度量空间中的讨论，第4章我们研究一般的拓扑向量空间，即有兼容的线性与拓扑结构的空间，这是因为度量空间不能涵盖所有分析中的函数空间，例如著名的 Schwartz 空间，见第10章定义2.1. 这类空间的刻画最重要的事情就是要清楚邻域基的结构. 此外，为了更好地操作极限语言，我们利用其上的半范数族诱导一个有类似度量性质的拓扑，并且这个拓扑直接等价于局部凸性质, 见定理2.2与定理2.1. 第7章将讨论这种一般空间上的算子延拓, 即空间 E 的子空间 F 上的满足某条件的算子 f，是否可以保持条件的情况下延拓成为 E 上的算子. 这是 Hahn-Banach 延拓定理的结果，见定理1.2. 用对偶空间的语言来叙述，就是子空间的对偶 F^* 与原空间的对偶 E^* 是否有联系？这件事情放在第8章进一步处理，即讨论空间的对偶理论. 此外，Hahn-Banach 定理的另一个形式是利用超平面隔离不交的凸集，见定理2.1. 最后，我们基于 Hahn-Banach 延拓定理给出的对偶空间的结果刻画空间 E 以及对偶空间 E^* 上的弱拓扑与弱 * 拓扑. 这两个拓扑以更柔性的方式刻画 Banach 空间，这个说法体现在 Banach-Alaoglu 定理、Goldstine 定理以及 Banach 自反性定理上，见定理3.1、定理3.2和定理3.3. 连同 Riesz 定理，它们是说 E^* 上的闭单位球可以赋予三种拓扑，其中算子范数 $\|-\|$ 诱导的拓扑 (强拓扑) 仅允许有限维球有紧性；弱 * 拓扑下的闭单位球是紧球；弱拓扑下的紧性直接刻画了空间的自反性，即 $E=E^{**}$. 第8章中主要讨论 Banach 空间的对偶理论，我们将线性代数中的短正合列推广到 Banach 空间范畴，即研究

典型正合列的对偶以及二次对偶:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & E \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & E/F \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & 0 \\
0 & E^*/F^{\perp} \arrow[l] \arrow[d, "()^*"] & E^* \arrow[l] \arrow[d, "()^*"] & F^{\perp} \arrow[l] \arrow[d, "()^*"] & 0 \arrow[l] \\
0 \arrow[r] & (E^*/F^{\perp})_{\perp} \arrow[r] & E^{**} \arrow[r] & E^{**}/(F^{\perp})_{\perp} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

6. 对于算子理论，我们把大部分讨论集中在第9章. 主要研究了紧算子的谱性质, 特别是 Fredholm 选择定理 (见定理2.1), 它说明紧算子具有类似有限阶矩阵的秩-零 (rank-null) 性质，为此我们还希望存在能够逼近这类算子的算子族，用到有限秩算子. 最后一节中研究 Hilbert 空间中的自伴紧算子，我们将证明这类算子在 Hilbert 空间中的谱分解定理, 即定理3.2, 是说 Hilbert 空间中的自伴紧算子具有类似有限维空间中实对称矩阵的性质，将 Hilbert 空间作直和分解，并且每个直和项与算子的特征子空间对应. 我们将在著名的 Sturm-Liouville 理论中看到它的应用，此外，几何学中，紧流形上的 Laplace 算子在 $\mathcal{L}^2$ 空间上也有离散的谱分解.

发展至今, 泛函分析已有不少成熟的教材, 例如 [**32, 6, 7, 8, 16, 17, 19, 21, 9**]. 本小册叙述的章法上主要参考自 [**32**]，事实上讲泛函分析这套理论的书籍汗牛充栋，此外分析学的内涵、技术与思想也不是一次汇报或一份讲义能够领悟殆尽的. 我进入大学就读已近过三载, 三年以来修习了基本的 Fourier 分析、实复分析、泛函分析与偏微分方程，当看到某个定理时，教科书告诉我可以“注意到”一些事情然后顺藤摸瓜，验证一套成熟的理论往往比运营理论解决问题甚至独立创造理论解决问题简单得多；因此分析的学习可比修行，我想需要怀一颗虔诚的道心，所谓的“技巧”的领悟需要长年累月、一砖一瓦地自省和尝试.

致谢. 这份讲义的大部分内容整理自浙江大学 2024-2025 秋冬学期泛函分析荣誉课程的听课笔记，由刘伟华老师教授，参考许全华先生的书 (泛函分析讲义，参见 [**32**])；第一部分和第二部分参考了同

年在本科学校的泛函分析讨论班的汇报讲义；第四部分的广义函数与 Sobolev 部分选自同年偏微分方程荣誉课程，由王伟 (小) 老师和张挺老师教授；Gromov-Hausdorff 收敛部分选自 2020 年浙江大学江文帅老师在广西数学中心教授的几何分析短期课程以及 24 年秋冬本科学校的几何分析讨论班汇报讲义. 感谢老师们的讲授和耐心的答疑，感谢浙江大学的李 mh 博士提供的习题课资料，感谢讨论班成员：李福汉、沈添奕、车倪逸、王嘉海等同学的汇报，感谢我的女朋友郑彤小朋友敲了部分章节的习题 LaTeX 代码 (尽管后期审稿发现不少错误).

作者：钱振烨

2025 年元宵

- 这份笔记中的索引项可以点击跳转，不适合纸质阅读.
- 笔记还未经审稿，诸多格式与标点错误敬请谅解. 定期会进行更新，如需获取最新版的笔记，可以到我的主页下载:

https://zhenye-math.github.io/

目录

范畴论基础

为简化和统一泛函分析中的叙述语言，我们简略引入范畴论.

¶ 范畴与态射.

定义 0.1. 一个**范畴** $\mathcal{C}$ 由以下要素构成:

(1) 一些**对象**构成的族，记为 $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$；

(2) 由所有的集合 $\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ 构成的族，这里的 A,B 取遍 $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ 中所有对象，$\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ 的元素 f 称为从 A 到 B 的**态射**，也可以用 $f:A\to B$ 表示；

(3) 对由任意三个对象 A,B,C 构成的三元组 (A,B,C)，存在映射:

$$\hom_{\mathcal{C}}(B,C)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\to\hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

其中

$$(g,f)\to gf$$

$gf:A\to C$ 称为态射 f,g 的**合成**态射.

另外，这些要素满足三条公理，参见 [**34**].

定义 0.2. 称范畴 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个**子范畴**，如果满足:

(1) $\mathrm{ob}(\mathcal{S})\subset\mathrm{ob}(\mathcal{C})$；

(2) 对任意对象 $A,B\in\mathrm{ob}(\mathcal{S})$，有 $\hom_{\mathcal{S}}(A,B)\subset\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$；

(3) 对于每个 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，范畴 $\mathcal{S}$ 中关于 A 的恒同态射也是范畴 $\mathcal{C}$ 中关于 A 的恒同态射；

(4) 范畴 $\mathcal{S}$ 中的合成法则是范畴 $\mathcal{C}$ 中的合成法则在 $\mathcal{C}$ 的态射上的限制.

进一步称 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个**忠实子范畴**，如果对任意对象 $A,B\in\mathrm{ob}(\mathcal{S})$，都有

$$\hom_{\mathcal{S}}(A,B)=\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$$

¶ 函子. 函子建立不同范畴之间的联系.

定义 0.3. 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 为两个范畴. 称 F 为从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**函子**，如果包含如下两部分:

(1) 对象族之间的映射：将范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 映到 $\mathcal{D}$ 中的对象 $F(A)$；

(2) 态射集之间的映射：将范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ 映到 $\mathcal{D}$ 中的态射 $F(f) \in \hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$；

并且满足两条公理，参见 [**34**]. 称函子 F 是**协变**的，如果 $F(gf) = F(g)F(f)$，反之称**逆变**的.

Part 1

空间理论

CHAPTER 1

度量空间

旨趣. 泛函分析中研究的一大类空间是度量空间，本册的前三章讨论的空间都属于度量空间的范畴. 作为一种特殊的拓扑空间，度量空间的好处是本身具有 Hausdorff 拓扑，因此讨论收敛性与连续性都有意义，这些概念是“分析”的开端. 当然泛函分析也不限于研究度量空间，我们将在第4章中研究更一般的空间以及在第7、8章中研究更一般空间上的拓扑与收敛，其中以弱拓扑与弱 * 拓扑最为瞩目，见第3节. 为叙述简明，我们默认读者已经掌握 [**26, 12**] 中基本点集拓扑的相关事实.

1. 度量空间中的基本概念

1.1. 度量空间及其例子.

1.1.1. *度量空间的定义与性质.*

定义 1.1. 设 X 为非空集合，称函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 为 X 上的一个**度量**，如果满足

M1 **正定性** $d(x,y)\geq 0$； $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$， $\forall x,y\in X$.

M2 **对称性** $d(x,y)=d(y,x)$， $\forall x,y\in X$.

M3 **三角不等式** $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$， $\forall x,y,z\in X$.

此时称 (X,d) 为**度量空间**.[1]

容易验证度量 d 诱导 X 上的拓扑 τ_d，称为度量拓扑，其中开集为 ϵ-度量球 $B_\epsilon(x) := \{y|d(x,y) < \epsilon\}$，其中 $x \in X$. 并且拓扑 τ_d 是 Hausdorff 的[2]，于是其中

(1) 收敛序列极限唯一.

因此在度量空间中谈序列极限和一般的极限概念是有意义的.

定义 1.2. 称序列 $(x_n)_{n\geq 1}$，**依度量收敛** (简称**收敛**) 于 $x \in X$，并称 x 为 (x_n) 的**极限**，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$，都有

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

记为 $x_n \to x$ 或者 $\lim x_n = x$. 此外，称 (x_n) 是一个 **Cauchy 列**，如果

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \forall m, n \geq N$$

注 1.1. 显然所有收敛序列都是 Cauchy 列，反之，称 X 是**完备**的，如果所有 Cauchy 列都收敛. 并且

(2) 若 Cauchy 列存在收敛的子列，则 Cauchy 列收敛.

定义 1.3. 称度量空间间的映射 $f : (X,d) \to (F,\delta)$ 在 $x(\in X)$ 处**连续**，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，使得

$$\delta(f(x), f(y)) < \epsilon, \quad \forall y \in B_\eta(x)$$

此外，称 f 在 X 上**连续**，如果在 X 上每点连续. 进一步称 f 在 X 上**一致连续**，如果上述 η 与 x 的选取无关.

不难看出

(3)
映射 f 在 x 处连续，当且仅当任意收敛于 x 的序列 (x_n)，满足 $\lim f(x_n) = f(x)$.

[1]此后本节中若不加说明，X 均指度量为 d 的度量空间.

[2]进一步是 T_3, T_4 的，参见 [**26**].

这是熟知的 Heine 归结原理. 并且度量空间 X 中的闭集也可以用序列收敛来刻画，即

(4)

F 为 X 中闭集当且仅当 A 中任一收敛序列 (x_n) 的极限 x 满足 $x \in A$.

练习 1.1. 证明论断 (1)、(2)、(3) 和 (4).

定义 1.4. 称度量空间间的映射 $f:(X,d)\to(F,\delta)$ 为**等距嵌入**[3]，如果

$$\delta(f(x),f(y))=d(x,y),\quad \forall x,y\in X$$

进一步称 f 是**等距同构** (或简称**等距**)，如果 f 还是满射.

练习 1.2. 验证等距嵌入是连续的单射, 进而说明等距同构蕴含同胚.

拓扑学告诉我们关于度量拓扑空间 (X,τ_d)[4]乘积空间的若干事实，参见 [**26, 12**]:

- 可度量化[5]:

  定理 1.1. 设 $(X_n,d_n)_{n\geq 1}$ 为一列度量空间，则集合直积 $X:=\prod_n X_n$ 可度量化.

  证明，SKETCH. 验证 $d(x,y):=\sup_{n\in\mathbb{N}^+}d_n(x_n,y_n)$，其中 $x=(x_n)_{n\geq 1}, y=(y_n)_{n\geq 1}\in X$，是 X 的度量，参见 [**32**]. □

- 完备性:

  定理 1.2. 在定理1.1的设定下，若每个度量空间 X_n 完备，则乘积空间 (X,d) 完备.

  证明，SKETCH. 参见 [**32**]. □

[3]容易验证 f 为单射.

[4]往后若不加说明，混用记号 τ_d 与 d.

[5][**26**] 中证明, 当拓扑空间 X 是 T_1,T_4 时, 且有可数拓扑基即 C_2 时 X 是可度量化的，这是 Urysohn 度量化定理. 关于拓扑是否可度量化的细节可以参见 [**26, 12**]，我们在第4章第3节中将利用度量化的若干事实说明 (实) 可微函数空间 C^m、连续函数空间 C、全纯函数空间 $\mathcal{H}$ 以及 Schwartz 函数空间 $\mathcal{S}$ 等等在相应半范数拓扑下是可度量化的.

- 紧性：

  定理 1.3 (Tychonoff). 设 $(X_i)_{i\in I}$，I 为指标集[6]，为一列紧拓扑空间[7]，则直积 $X := \prod_i X_i$ 在乘积拓扑[8]下是紧空间.

  证明，SKETCH. 参见 [**26, 12**]. □

练习 1.3. 证明紧度量空间 X 上的连续映射是一致连续的.

进一步可以利用序列与映射连续性的刻画验证度量函数 d 的连续性，即当 $X\times X$ 赋予乘积拓扑时，度量 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 是连续的. 并且若定义 X 中点到子集 A(特别地，单点集) 的距离函数

$$\rho(x) := d(x,A) := \inf\{d(x,y)|y\in A\}$$

则 $\rho(x)$ 关于 x 是连续的，留给读者验证.

练习 1.4. 证明距离函数 $\rho(x)$ 是连续的.

1.1.2. *度量空间的例子.* 最直观的例子无外乎实直线 $\mathbb{R}$ 和复平面 $\mathbb{C}$，也是微积分与单复分析中经典的研究对象，泛函分析将研究一般的度量空间，甚至“无限维”度量空间. 以下例子是平凡的.

例 1.1. 对一般非空集合 X，规定度量

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{如果} x\neq y \\ 0, & \text{如果} x = y \end{cases}$$

称 (X,d) 为**离散度量空间**.

推广微积分与单复变函数，实变函数与多复分析会在如下空间中考量.

例 1.2. 无限域 $\mathbb{K}$[9]的 n 重笛卡尔积 $\mathbb{K}^n$ 中的每个向量 (点) 表示为 $x = (x_1,\cdots,x_n)$，$\forall x_k\in\mathbb{K}$，其上可由自然内积诱导度量

$$d(x,y) := \sqrt{<x,y>}$$

[6]往后不再指出.

[7]称拓扑空间 X 是**紧**的，如果对 X 的任意覆盖 $(O_i)_{i\in I}$，存在有限子覆盖.

[8]参见 [**26**].

[9]本册中若不加说明，表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

其中自然内积指 $< x, y >:= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. 此时称 $\mathbb{K}^n$ 为**欧氏空间**. 若以同一域中的元素为系数，线性代数中相同维数 (有限维) 的欧式空间互相同构，即维数决定欧式空间的结构.

更一般地，现代实分析中将考虑在一般测度空间上研究，其中对 $\mathcal{L}^p$ 空间的研究最有用，乃至调和分析与流形上的分析. 其上的完备性、稠密性与可分性、对偶空间、有界线性算子以及谱理论等等是早期泛函分析研究的重点例子.

例 1.3. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为抽象测度空间，其中 $\mathcal{M}, \mu$ 分别为 σ-代数和其上的测度. 其上 $\mathcal{L}^p$ 空间 $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) =: \mathcal{L}^p(X)$ 定义为

$$\mathcal{L}^p(X) := \{f : X \to \mathbb{K} : ||f||_p < \infty\}$$

其中

$$||f||_p := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

特别地，$p = \infty$ 时，

$$||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

称为 $\mathcal{L}^p$ 范数，见定义1.1. 在度量

$$d(f, g) = \left(\int_X |f - g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

下成为度量空间，其中 $1 \le p < \infty$[10]；特别地，取 X 为可列集[11]$\mathbb{N}$(或 $\mathbb{Z}$)，μ 为计数测度，即令 $\mu(n) := 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$，此时 $l^p(\mathbb{N})$ 在度量

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$$

---

[10]当 $p < 1$ 时，d 满足如下拟三角不等式

$$d(f, h) \le 2^{1-p}(d(f, g) + d(g, h)), \quad \forall f, g, h \in \mathcal{L}^p(X)$$

[11]当 X 为不可列集时也可以定义相应的 $l^p(X)$，特别地当 $p = 2$ 时可见第3章的第**??**节中**可和族**的概念.

其中 $\mathbf{x} := (x_n)_{n\geq 1}, \mathbf{y} := (y_n)_{n\geq 1}$ 为 $l^p(\mathbb{N})$ 中的序列，成为度量空间. 更特别地，取 $p=\infty$，本性有界空间 $\mathcal{L}^\infty(X)$ 以及有界序列空间 $l^\infty(\mathbb{N}^+)$ 在度量

$$d(f,g) = \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|,\ d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n-y_n|$$

下成为度量空间，参见 [**3, 14**]. 熟知该度量下的收敛 (准确而言是范数下的收敛) 为依范数 $||-||_p$ 收敛.

例 1.4. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为有限[12]抽象测度空间，X 上几乎处处有限的可测函数全体 (记为 S) 在度量

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu$$

下成为度量空间，称为**可测函数空间**. 回忆实分析，上述度量下的收敛等价于依测度收敛，参见 [**33, 3, 14**]. 记全体实序列为 s，其在 **Fréchet 度量**

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\cdot\frac{1}{2^n}$$

下成为度量空间，称为**序列空间**.

另一个例子在第5章中会着重研究.

例 1.5. 设 X 为紧 Hausdorff 空间, (Y,d) 为度量空间, 记 $C(X,Y)$ 为全体 X 到 Y 的连续映射，其在**一致度量**

$$\Delta(f,g) = \max_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

下成为度量空间，称为**连续映射空间**. 数学分析中将上述度量下的收敛称为一致收敛. 此外，妥协定义

$$\Delta_K(f,g) = \max_{x\in K,\text{其中 } K \text{ 为 } X \text{ 的任一紧子集}} d(f(x),g(x))$$

称为**紧一致度量**，其诱导的拓扑称为紧一致收敛拓扑[13]. 数学分析中称该度量下的收敛为紧一致收敛.

[12]即 $\mu(X)<\infty$.

[13]更一般地，定义**紧开拓扑**，参见 [**26, 12**].

最后一个例子在几何中很常用，研究一般的黎曼流形，能应用分析学的依据是其至少是一个度量空间.

例 1.6. 设 (M,g) 为黎曼流形，其中 g 为黎曼内积[14]. 其在度量

$$d(x,y)=\inf_{\gamma\in\Omega_{x,y}} L_g[\gamma]$$

下成为度量空间，记为 (M,d_g)，其中 $\Omega_{x,y}=\{\gamma:[0,1]\to M|\gamma(0)=x,\gamma(1)=y,\ \gamma$ 为分段光滑曲线$\}$，L_g 为长度“泛函”，即

$$L_g[\gamma]:=\int_0^1 <\gamma'(t),\gamma'(t)>_g^{1/2}\,\mathrm{d}t$$

称黎曼流形 (M,g) 与 (N,h) 间的光滑同胚 f 是**黎曼等距**的，如果

$$f^*h(X,Y)=g(X,Y),\quad X,Y\text{为 } M \text{ 上的向量场}$$

容易验证黎曼等距的 f 蕴含 (M,d_g) 与 (N,d_h) 的等距 (见定义1.4)，反过来仍成立，见 Myers 与 Steenrod 在 1939 年的工作. 因此黎曼流形度量的研究引入分析学的工具是合理的.

1.2. 度量空间的若干性质.

1.2.1. *完备性*. 先前的例子中，熟知例1.2是完备的；数学分析中证明了例1.5在一致度量下完备，但装备 $\mathcal{L}^p(p<\infty)$ 度量后不完备；实分析中例1.4和例1.3完备，见问题3和问题4. 几何学中例1.6的完备性可以被更直观地刻画，我们有 Hopf-Rinew 定理，是说黎曼流形的完备性等价于测度完备性，参见 [**29**]，此外，它还蕴含完备黎曼流形任一有界闭子集为紧集，读者不妨联系定理1.3.

下面我们希望直观解释“完备性”如何刻画度量空间. 数学分析中曾经罗列过“实数系六大定理”，参见 [**15**]，本质上刻画实数系 $\mathbb{R}$ 在通常度量下的完备性：

C1 Cauchy 收敛准则；

C2 Cauchy-Cantor 定理；

C3 确界存在性定理；

C4 单调有界序列必有极限；

C5 Heine-Borel 定理；

[14]参见 [**29**].

C6 Bolzano-Weierstrass 定理.

其中 C1 是本质的，C3、C4 无法推广到缺少序关系的空间，C5、C6 是一般拓扑空间和度量空间紧性的刻画，我们将在段落??中证明它们的等价性. 最后，综合效率与实用性，我们希望 C2 能带来启发.

首先定义子集**直径**的概念，对 $A \subset X$，定义

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

为子集 A 的**直径**.

定理 1.4 (Cauchy-Cantor). 度量空间 X 是完备的当且仅当若 (A_n) 为 X 中非空递降闭集列，即

$$\cdots \supset A_{n+1} \supset A_n \supset \cdots \supset A_1$$

且 $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$，此时称集列 (A_n) 为**闭集套**，则 $\bigcap_n A_n$ 为单点集.

证明，SKETCH. 先证必要性. 适当选取 (x_n)，$x_n \in A_n$. 由条件可知

$$d(x_m, x_n) \to 0, \quad m, n \to \infty$$

即为 Cauchy 列. 由完备性和 A_n 的闭性可知存在极限 $x \in \bigcap A_n$. 若另有 $y \in \bigcap A_n$，于是 $d(x,y) > 0$，这与 $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ 矛盾.

再证充分性. 设 (x_n) 为 Cauchy 列，构造

$$A_n = \overline{\{x_k | k \geq n\}}$$

不难验证 (A_n) 为闭集套，进而 (x_n) 收敛. □

注 1.2. 解释上述定理的必要性，若去除条件 $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$，例如 $(A_n = [n, \infty))_{n\geq 1}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有 $\bigcap_n A_n = \emptyset$. 告诉我们：度量空间的完备性仅仅是刻画 "小子集" 的性质，参见 [**32**]. 换句话说，若子集列 (A_n) 不够 "小"，完备性无法在 (A_n) 中体现.

此外，一定程度上完备性与子空间的闭性有联系，注意到 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ 不完备但 $[0,1]$ 完备. 事实上我们有一般的讨论：

定理 1.5. 设 $A \subset X$，则

(1) 若 (A,d) 为完备子空间，则 A 为 X 中闭集；

(2) 若 (X,d) 完备且 A 为闭集，则 (A,d) 为完备子空间.

证明. (1) 只要证 A 中所有收敛序列的极限在 A 中. 为此取 A 中收敛序列 (x_n)，显然为 Cauchy 列，由完备性可知其收敛于 A.

(2) 取 A 中 Cauchy 列 (x_n)，由 X 的完备性知 (x_n) 收敛，又 A 为闭集，进而极限在 A 中，故 A 完备.

□

注 1.3. 上述定理 (2) 中的 X 完备的条件不可去，注意到 $\mathbb{Q}$ 的闭子空间可能不完备.

拓扑学告诉我们，T_4 的拓扑空间中定义在闭子集上的连续函数可以连续延拓到整个空间，称为 Tietze 扩张定理，参见 [**26**]. 而对于度量空间，其稠密子集上的一致连续映射可以延拓为全空间上的一致连续映射.

定理 1.6 (一致连续映射延拓). 设 $(X,d),(F,\delta)$ 为两个度量空间，且 (F,δ)完备. 若映射 $f:X_0\to F$ 一致连续，其中 X_0 为 X 的稠密子集，那么 f 可唯一地延拓为一致连续映射 $\mathbf{f}:X\to F$，使得 $\mathbf{f}|_{X_0}=f$.

证明，SKETCH. 参见 [**32**]. □

回忆数学分析中利用有理数 $\mathbb{Q}$ 构造实数系 $\mathbb{R}$(Cauchy 早期的工作，参见 [**15**].)，这实现 $\mathbb{Q}$ 的完备化，我们将这个事实抽象出来，完备化任一度量空间.

定理 1.7 (度量空间完备化). 设 (X,d) 为度量空间，则存在唯一的 (等距意义下[15]) 完备度量空间 $(\mathbf{X},\mathbf{d})$ 使得

(1) X 在 $\mathbf{X}$ 中稠密；

(2) $\mathbf{d}|_X=d$.

并且称 $\mathbf{X}$ 为 X 的**完备化空间**.

证明. 证明分以下四步.

[15]此后不再赘述.

Step 1 构造 $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$. 令集合

$$\tilde{X} := \{(x_n) : (x_n)\text{为 } X \text{ 中 Cauchy 列}\}$$

考虑等价关系 $\sim$

$$(x_n) \sim (y_n) \Longleftrightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0$$

定义商集 $\mathbf{X} = \tilde{X}/\sim$, 记其中元素为 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 等等. 显然 $X \subset \mathbf{X}$, 注意到常序列 (x) 为 Cauchy 列，所处等价类另记为 $\tilde{x}$，故 $\iota : (x) \mapsto \tilde{x}$ 为单射. 再规定 $\mathbf{X}$ 中度量为

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \lim d(x_n, y_n)$$

验证 $\mathbf{d}$ 符合要求：

良定义 要验证 $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 有取值，注意到

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

由 $(x_n), (y_n)$ 为 Cauchy 列可知上式左侧为实 Cauchy 列，故收敛. 再验证 $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 与序列的选取无关，设另有两组 Cauchy 列 $(x'_n) \in \mathbf{x}$, $(y'_n) \in \mathbf{y}$ 于是

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$$

进而 $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(x'_n, y'_n)$.

度量 定义1.1的验证时容易的，留作习题.

Step 2 验证 X 在 $\mathbf{X}$ 中稠密且 $\mathbf{d}|_X = d$. 由之前的讨论，任取 $x, y \in X$，显然有 $\mathbf{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(x, y)$，故 $\mathbf{d}|_X = d$. 此外，任取 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$，取代表元 (x_n)，注意到

$$\lim_n \mathbf{d}(\mathbf{x}, \tilde{x}_n) = \lim_m \lim_n d(x_m, x_n) \to 0$$

故 X 稠密.

Step 3 证明 $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ 完备. 取 $(\mathbf{x}^n)$ 为 $\mathbf{X}$ 中 Cauchy 列，由 X 的稠密性，对每个 n，存在 $x_n \in X$，使得 $\mathbf{d}(\mathbf{x}^n, \tilde{x}_n) < 1/n$. 于是

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) = \mathbf{d}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) &\leq \mathbf{d}(\tilde{x}_m, \mathbf{x}^m) + \mathbf{d}(\mathbf{x}^m, \mathbf{x}^n) + \mathbf{d}(\tilde{x}_n, \mathbf{x}^n) \\ &< \frac{1}{n} + \mathbf{d}(\mathbf{x}^m, \mathbf{x}^n) + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

由 $(\mathbf{x}^n)$ 为 Cauchy 列，进而 (x_n) 为 Cauchy 列，记其所处等价类为 $\mathbf{x}$，于是

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}^n,\mathbf{x}) \le \mathbf{d}(\mathbf{x}^n,\tilde{x}_n) + \mathbf{d}(\tilde{x}_n,\mathbf{x}) < \frac{1}{n} + \mathbf{d}(\tilde{x}_n,\mathbf{x}) \to 0$$

因此 $\lim \mathbf{x}^n = \mathbf{x}$，故 $\mathbf{X}$ 完备.

Step 4 证明 $(\mathbf{X},\mathbf{d})$ 唯一. $\mathbf{X}$ 满足的确切条件可以归纳为

- $\iota : X \to \mathbf{X}$ 为等距嵌入.
- $\mathbf{d}|_X = d$.
- $\iota(X)$ 在 $\mathbf{X}$ 中稠密.

设 $(\mathbf{X}',\mathbf{d}')$ 为满足上述条件的另一空间，并记 X 到 $\mathbf{X}'$ 的等距嵌入为 ι'. 下证 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}'$ 间存在等距. 定义

$$f : \iota(X) \to \mathbf{X}', \quad \tilde{x} \to \iota'(x)$$

由条件，f 是一致连续的，又由 X 的稠密性与 $\mathbf{X}'$ 的完备性以及定理1.6可知，f 可被唯一地延拓成 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{X}'$ 的一致连续映射 f'. 并且可以验证延拓以后的 f 是等距嵌入，留作习题. 最后，由 $\iota'(X)$ 的稠密性可知 f' 为满射，进而为等距.

□

练习 1.5. 验证上述证明中的 $\mathbf{d}$ 为度量，$\tilde{f}$ 为等距嵌入.

1.2.2. 可分性.

定义 1.5. 称 $F \subset X$ 为**稠密**子集，如果 $\overline{F} = X$. 其中 $\overline{F}$ 为拓扑 τ_d 下的闭包. 称 X 是**可分**的，如果存在可数的稠密子集.

注 1.4. 实分析告诉我们：例1.3中的 $\mathcal{L}^p(X), l^p$，$1 \le p < \infty$ 是可分度量空间，见问题5，但 $\mathcal{L}^\infty(X), l^\infty$ 不可分，见问题6.

练习 1.6. (1) 举例说明度量空间不一定有可数拓扑基.
(2) 证明可分度量空间有可数拓扑基.

注 1.5. 此外，可分性在 Hilbert 空间中是有趣的性质，见第3章第**??**节中的叙述. 可分的空间问题可以优先处理其中可数的稠密子集 (可数性导致一些讨论是容易的，例如数学归纳法)，最后将稠密子集的性质延拓到整个空间.

1.2.3. 紧性.

定义 1.6. 称子集 F 是 **ϵ-稠密**的, 如果 $X \subset B_\epsilon(F)$, 其中 $B_\epsilon(F) := \{x \in X | d(x, F) < \epsilon\}$

定义 1.7. 称子集 Y 是 **ϵ-网**, 如果 $d(y_1, y_2) > \epsilon$, $\forall y_1, y_2 \in Y$ 且 $X \subset B_\epsilon(F)$.

度量空间的紧性在验证和操作上相对一般拓扑空间要便捷, 我们断言以下定理中的叙述 (3) 是很好的验证工具, 而 (2) 的使用面广. 我们将在第5章第2节定理1.1的证明中利用 (3) 验证等度连续映射族闭包 $\overline{\mathcal{H}}$ 存在有限 ϵ-网, 进而说明 $\mathcal{H}$ 的相对紧性; 此外, 在应用定理1.1时往往使用 (2) 找到收敛的子列.

定理 1.8. 以下说法互相等价:

(1) (Heine-Borel) (X, d) 是紧空间.

(2) (Bolzano-Weierstrass) X 任一中无限子集必有聚点, 特别地, 任一序列都存在收敛子列.[16]

(3) (X, d) 完备且存在有限 ϵ-网[17].

证明. 参见 [**32**]. □

1.3. 度量空间范畴. 显然全体拓扑空间连同连续映射作为态射成为拓扑空间范畴, 记为 $(\mathcal{TOP}, \mathcal{CONTI})$, 全体度量空间连同连续映射作为态射成为 $\mathcal{TOP}$ 的忠实子范畴, 记为 $(\mathcal{MEC}, \mathcal{CONTI})$; 若度量空间以等距嵌入为态射, 则成为 $\mathcal{TOP}$ 的子范畴, 记为 $(\mathcal{MEC}, \mathcal{ISO})$, 其中的同构为等距同构. 在此范畴下我们不区分互相等距的度量空间.

特别地, 例1.6说明每个黎曼流形 (M, g) 成为度量空间, 并且黎曼几何中的黎曼等距等价于度量空间意义下的等距嵌入, 因此全体黎曼流形连同黎曼等距做成的范畴 $(\mathcal{RIE}, \mathcal{ISO})$ 成为 $\mathcal{MEC}$ 的忠实子范畴. 第11章中将进一步讨论范畴 $(\mathcal{RIE}, \mathcal{ISO})$ 在几何背景下的拓扑与收敛问题.

此外, 我们已经介绍度量空间中的 Cauchy 列与 (一致) 连续映射, 见定义1.2和定义1.3. 很显然范畴 $(\mathcal{MEC}, \mathcal{CONTI})$ 中的态射不保

---

[16]称为列紧性.

[17]划线处称为预紧性.

持 Cauchy 列. 但是可以证明，一致连续映射保持 Cauchy 列，即设 (x_n) 为 X 中 Cauchy 列，映射 $f: X \to Y$ 使得 $(f(x_n))$ 仍为 Cauchy 列. 因此可以考虑相比上述范畴的子范畴 $(\mathcal{MEC},\mathcal{UNCONTI})$，其中 $\mathcal{UNCONTI}$ 表示一致连续映射作为态射，讨论 Cauchy 列在度量空间间的传递问题，进而讨论完备性的传递. 读者可以见定理1.6与定理1.7.

练习 1.7. 验证上述划线处的论断.

概念上 $(\mathcal{MEC},\mathcal{UNCONTI})$ 不再成为 $(\mathcal{TOP},\mathcal{CONTI})$ 的子范畴，因为我们在一般拓扑空间中不具有刻画集合大小与距离的尺度. 因此完备性是 $\mathcal{MEC}$ 范畴的概念，事实上可以构造 $\mathcal{TOP}$ 范畴中同一拓扑空间分别被完备和不完备的度量诱导，见问题1.

2. 不动点定理

2.1. 压缩映射原理与 Banach 不动点定理.

2.1.1. 压缩映射原理.

定义 2.1. 设 $f:(E,d)\to(F,\delta)$ 为度量空间间的映射，称 f 为

(1) **Hölder 映射**，如果存在 $\lambda,\alpha>0$，使得

$$\delta(f(x),f(y))\le\lambda\cdot d(x,y)^{\alpha},\quad x,y\in E$$

并称 $\inf\{\alpha\}$ 为 Hölder 指数.

(2) **Lipschitz 映射**，如果存在 $\lambda>0$，使得

$$\delta(f(x),f(y))\le\lambda\cdot d(x,y),\quad x,y\in E$$

并称 $\inf\{\lambda\}$ 为 Lipschitz 系数.

(3) **压缩映射**，如果存在 $0<\lambda<1$，使得

$$\delta(f(x),f(y))\le\lambda\cdot d(x,y),\quad x,y\in E$$

并称 $\inf\{\lambda\}$ 为压缩系数.

注 2.1. 根据定义，显然有

压缩映射 $\subset$ Lipschitz 映射 $\subset$ Hölder 映射 $\subset$ 一致连续映射

例 2.1. (1) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$，$f(x)=1/x$ 是连续映射.

(2) $f:[0,1)\to\mathbb{R}$，$f(x)=1/x$ 是一致连续映射.

(3) $f:\mathbb{R}_{\ge0}\to\mathbb{R}$，$f(x)=\sqrt{x}$ 是 Hölder 映射，其中 $\alpha=1/2$.

(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=|x|$ 是 Lipschitz 映射.

(5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=1/2|x|$ 是压缩映射.

压缩映射的好处是可以迭代得到唯一的不动点,它可以提升为“泛函”方程 $f(x)=x$(其中 f 可以是一般压缩的“泛函”）的解的存在唯一性. 为此任取 $x_0\in E$，令迭代

$$x_n=f^n(x_0)$$

我们有

$$d(x_{n+1},x_n)=\lambda^n d(x_1,x_0)$$

对 $p \geq 1$，有

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^{n+p-1} + \cdots + \lambda^n) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

因此 (x_n) 为 Cauchy 列，并且

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\lambda^n (1-\lambda^p)}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \tag{5}$$

上述不等式称为**后验估计**，即从哪一项还是迭代，以及迭代多少次达到既定精度. 若映射 f 从 x_0 开始迭代，类似的办法可以得到

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &\leq (\lambda^{m-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda + 1) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{1-\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

此时若令 $m \to \infty$，假设 (x_n) 收敛，则有

$$d(\lim_m x_m, x_0) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \tag{6}$$

称为**先验估计**.

以上方法称为**压缩映射原理**，不难得到如下定理:

定理 2.1 (Banach 不动点定理). 设 (E, d) 为完备度量空间，且 $f : E \to E$ 为压缩映射，那么 f 一定存在唯一不动点，即 $f(x) = x$，$x \in E$.

其中不动点 x 是唯一的，注意到若另有不动点 x'，则

$$0 < d(x, x') = d(f(x), f(x')) < \lambda d(x, x')$$

这与 $0 < \lambda < 1$ 矛盾!

2.1.2. *Banach 不动点定理的若干应用*. Banach 不动点定理在分析与微分方程中有许多应用.

应用一 ： 常微分方程解的唯一性考虑如下常微分方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{7}$$

我们将其转化为如下积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s$$

视上式右侧为 x 的“泛函”，记为 $T[x]$，则初值问题 (7) 成为“泛函方程”不动点问题

$$T[x] = x \tag{8}$$

于是常微分方程解的存在唯一性问题转化为某函数空间的不动点存在唯一性问题. 我们亟待考量如下两个方面的问题:

- 在何种空间讨论方程 (8)? 空间是否完备?
- 满足何种条件的 f 使得 T 存在不动点? 进一步使得 T 存在唯一不动点?

古典常微分方程中考量的空间是连续函数空间 $C(\mathbb{R})$，其上赋予一致度量成为完备空间，见例1.5. 因而具备应用定理2.1的条件. [**22**] 中证明当函数 f 是 Lipschitz 连续函数时局部存在唯一解，并且 Lipschitz 系数越小，唯一解的存在范围越大，见问题10. 然而定理2.1没有交代不动点存在性条件，因此减弱 f 正则性使得解存在至何种程度暂时无法得知. 事实上, 我们将在第5章考量连续映射空间 $C(X, Y)$ 中连续映射列，用等度连续的办法证明当 f 仅连续时方程 (8) 存在解，参见 [**22**].

应用二：偏微分方程与 Sobolev 空间若将上述问题在一个更大的框架内考量，我们还可以研究偏微分方程解的存在唯一性. 现代偏微分方程的基本观点基于泛函分析，特别地也将考虑方程 (8) 的不动点问题. 进一步地，我们可以严格定义前文中打引号的“泛函”，称 T 为函数空间 X[18]上的一个**泛函**，如果 T 为 X 上的一个映射. 因此，前文中例1.6的 L 是一个泛函，称为**长度泛函**，方程8中的 E 是一个泛函. 泛函的作用我们一般用 $[-]$ 表示. 于是偏微分方程可以适当转化为研究从函数空间 X 到函数空间 Y 的泛函 T

$$T : X \to Y$$

[18] 函数 (或一般映射) 的集合 + 结构，例如例1.3、例1.4和例1.5.

> 而真正的困难不在于泛函上的技术，而是如何找到合适的空间 X, Y 以及合适的泛函 T. 为此，Schwartz 建立了广义函数的概念，随后 Sobolev 空间用于考量现代偏微分方程，这么做的好处是可以摆脱函数正则性不佳的限制，并且这类空间是完备的，我们将在第10章中介绍它们.

至此，我们可以对定义完备性做一个目的性的描述：完备性是出于应用 Cauchy 列方法[19]人为给定的术语.

2.2. Brouwer 不动点定理与 Schauder 不动点定理. 我们再介绍两类不动点定理，它们基于 20 世纪 Brouwer、Schauder 等人在拓扑学与泛函分析的工作. 在分析中的应用不似定理2.1那么显著，但刻画了空间中紧凸集的结构.

2.2.1. *Brouwer 不动点定理.*

定理 2.2 (Brouwer，1911). 欧式空间 $\mathbb{R}^m$ 中，任意 n 维 $(n \le m)$ 有界闭凸集 D 到自身的连续映射存在不动点.

我们可以基于代数拓扑的工具给一个简单的证明，参见 [**5**].

证明，SKETCH. 注意到 D 同伦于 n 维闭单位球 D^n. 我们断言不存在 D^n 到边界 S^{n-1} 的收缩 r，若不然，则有如下映射的正合列：

$$S^{n-1} \overset{\iota}{\hookrightarrow} D \overset{r}{\twoheadrightarrow} S^{n-1}$$

其中 ι 为自然含入. 诱导同调群的长正合列：

$$\cdots \to H_n(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(D^n) \to H_n(S^{n-1}) \to \cdots$$

由于 $H_n(S^{n-1}) = H_{n-1}(D^n) = H_n(S^{n-1}) = 0$，而 $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$，矛盾！假设连续映射

$$f : D^n \to D^n$$

不存在不动点，进而可通过 f 构造 D^n 到 S^{n-1} 的收缩，这是不可能的. $\square$

注 2.2. 从证明中不难看出，有限维情形下，定理2.2等价于如下论断：

[19]避免直接讨论极限、压缩映射原理等等.

不存在从有界闭凸集到边界的收缩.

基于这个观察，[**11**] 利用证明不存在从光滑带边流形到边界的光滑收缩，进而证明定理2.2.

此外，定理2.2在拓扑与组合上蕴含一系列命题，例如

- (Borsuk-Ulam) 任意从 n 维球面 S^n 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射，至少存在一对对径点同像，即
$$f(x) = f(-x)$$
- (Pancake 定理) 任给 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个有界可测集，存在一张 $n-1$ 维超平面将每个集合分成等测的两部分.

参见 [**5**].

2.2.2. *Schauder 不动点定理.* 在第2章乃至整个泛函分析中我们将研究“无限维”的空间. 而不动点定理中，定理2.1仍然适用，我们断言定理2.2在“无限维”[20]空间是失效的. 为此，我们给一个反例.

考虑 l^2 空间. 对其中单位闭球 B 作如下映射:
$$f : x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (\sqrt{1 - ||x||_2^2}, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$$
其中 $||x||_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$. 不难验证 f 是连续的，留作习题. 但 f 不存在不动点，若不然，$f(x) = x$，那么
$$x_1 = x_2 = \cdots = \sqrt{1 - ||x||_2^2}$$
该方程组无解.

这个问题的本质出在定理1.3上，即无限维空间有界闭集不紧，因此我们将定理2.2的条件加强为紧凸集[21]. 证明可见问题14.

定理 2.3 (Schauder 不动点定理). 赋范线性空间 (见定义1.1)E 中的紧凸集 D 到自身连续映射有不动点.

---

[20]这里有必要澄清“无限维”的含义，在第2章中我们定义的赋范线性空间本身的线性结构带来一个“维数”的概念，这里所谈的“无限维”指的是拓扑的“维数”. 1912 年 Brouwer 基于映射度理论证明线性空间 $\mathbb{R}^n$ 所谈的维数等价于 $\mathbb{R}^n$ 作为拓扑空间的维数，因此往后我们将其混为一谈.

[21]我们回忆凸集的概念. 称度量线性空间 (X, d) 的子集 A 为**凸集**，如果任意 $x, y \in X$，都有
$$\lambda x + (1-\lambda)y \in X, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

习题一

¶ 完备性不是拓扑概念.

问题 1. 本习题意图说明完备性不是拓扑概念.

(1) 设有函数 $\phi(x)=\frac{x}{1+|x|}$，$x\in\mathbb{R}$，并定义

$$d(x,y):=|\phi(x)-\phi(y)|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

证明：由此定义的 d 是 $\mathbb{R}$ 上的度量并和 $\mathbb{R}$ 上通常意义下的拓扑一致，但 d 不完备.

(2) 更一般地，设 O 为完备度量空间 (E,d) 上的开子集，且 $O\neq E$. 映射 $\phi: O\to E\times\mathbb{R}$ 定义为

$$\phi(x)=\left(x,\frac{1}{d(x,O^c)}\right):=(x,\rho(x)),\quad \forall x\in O$$

证明：ϕ 为从 O 到 $E\times\mathbb{R}$ 的一个闭子集上的同胚. 并由此导出 O 上存在一个完备的度量，由其诱导的拓扑和 d 在 O 上诱导的拓扑一致，而 $(O,d|_O)$ 不完备.

¶ 完备空间的快速 Cauchy 子列技巧.

问题 2 (快速 Cauchy 子列). 证明: 度量空间 E 完备的充要条件为若任一序列 (x_n) 满足

$$d(x_n,x_{n+1})\leq 2^{-n}$$

则序列收敛，我们称该序列为**快速序列**.

问题 3 ($\mathcal{L}^p$ 空间完备性的快速 Cauchy 子列证明). 本习题希望读者通过回顾 $\mathcal{L}^p$ 空间 (见例1.3) 完备性的证明来熟悉快速 Cauchy 列的技巧. 通过以下步骤证明 $\mathcal{L}^1(X)$ 的完备性:

在实分析中我们知道 $\mathcal{L}^p$ 空间 (见例1.3) 当 $p\geq 1$ 时的 Minkowski 不等式 (即三角不等式)

$$||f||_p+||g||_p\leq ||f+g||_p$$

等价于闭单位球

$$B:=\{x\in X: d(x,x_0)\leq 1,\ \text{固定的 } x_0\in X\}$$

的凸性，参见 [**3, 14**]，这是“无穷维”空间中的例子.

(1) 对 $\mathcal{L}^1(X)$ 中任一 Cauchy 列 (f_n)，证明存在问题2中的快速 Cauchy 子列，即存在子列 $(f_{n_k})_{k\geq 1}$，使得

$$|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \leq 2^{-k}$$

(2) 证明 (1) 中的子列 (f_{n_k}) 依 $\mathcal{L}^1$ 度量收敛，进而说明 Cauchy 列 (f_n) 收敛.

(3) 将上述技巧推广到 $\mathcal{L}^p$ 空间，其中 $1 < p \leq \infty$.

问题 4 ($\mathcal{L}^p$ 空间完备性的实分析证明). 在本习题中我们希望读者比较与问题3的异同. 通过以下步骤证明 $\mathcal{L}^p(X)$ 的完备性：

(1) 当 $p < \infty$ 时, 证明 $\mathcal{L}^p$ 中 Cauchy 列依测度收敛, 参见 [**3, 14**]. 进而结合实分析中的 Riesz 定理说明存在子列 $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ 依 $\mathcal{L}^p$ 度量收敛，进而 (f_n) 收敛.

(2) 证明 $\mathcal{L}^\infty$ 是完备的.

问题 5 ($\mathcal{L}^p$ 空间可分). 本习题意图说明 $\mathcal{L}^p$ 空间的可分性.

(1) 通过以下步骤说明 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$[22]可分.
   (a) 证明 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数空间 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{L}^p$ 诱导拓扑下稠密于 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$；
   (b) 证明 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的阶梯函数空间 simple($\mathbb{R}^n$) 在 $\mathcal{L}^p$ 诱导拓扑下稠密于 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$；
   (c) 说明 (b) 中阶梯函数空间的端点取有理数的子空间仍稠密，进而 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ 可分.

(2) 证明 $l^p(\mathbb{N}^+)$ 可分. [提示：考虑集合

$$\mathbb{Q}^\omega := \{(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots) : x_i \in \mathbb{Q}\}$$

说明它的稠密性与可数性.]

问题 6 ($\mathcal{L}^\infty$ 空间不可分). 本习题希望说明 $\mathcal{L}^\infty$ 是不可分的.

(1) 设 A 为度量空间 (E, d) 的不可数子集，且存在 $r > 0$，使得

$$d(x, y) \geq r, \quad \forall x, y \in A$$

证明：E 不可分.

[22]设 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^{\mathbb{R}^n}, \mathrm{m})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度空间.

(2) 考虑空间 $\mathcal{L}^\infty([a,b])$，令

$$A := \{\chi_{[a,s]}(t) : s \in [a,b]\} \subset \mathcal{L}^\infty([a,b])$$

验证：

(a) A 为 $\mathcal{L}^\infty$ 的不可数子集；

(b) A 中任意两点 $\chi_{[a,s]}, \chi_{[a,s']}$，满足

$$d(\chi_{[a,s]}, \chi_{[a,s']}) = 1$$

并利用 (1) 说明 $\mathcal{L}^\infty$ 不可分.

(3) 考虑空间 $l^\infty(\mathbb{N}^+)$，令

$$A := \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n = 0或1\}$$

利用 (1) 证明 $l^\infty(\mathbb{N}^+)$ 不可分.

¶ 压缩映射原理的进一步讨论.

问题 7 (一致连续映射的刻画). 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为一致连续映射，证明：存在非负常数 a, b，使得

$$|f(x)| \leq a||x|| + b$$

其中 $||x||$ 为 $\mathbb{R}^n$ 通常意义下的模长.

问题 8 (交换压缩映射的不动点定理). 设 (E, d) 为完备度量空间，f, g 为 E 上可交换的压缩映射，即 $f \circ g = g \circ f$. 证明：f, g 有唯一的、共同的不动点.

问题 9 (非交换压缩映射的不动点定理). 本习题希望推广上一习题的结果. 设 (E, d) 为完备度量空间，回忆点 x 到子集 A 的距离函数

$$\rho_A(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

并记 χ 为 E 的全体紧子集构成的集族. 对任意的 $A, B \in \mathcal{K}$，定义

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \sup_{x \in E} |\rho_A(x) - \rho_B(x)|$$

(1) 证明 $d_{\mathcal{H}}$ 是一个度量，称为 **Hausdorff 度量**.

(2) 证明:

$$d_{\mathcal{H}} = \inf\{\epsilon \geq 0 : A \subset B_\epsilon(B),\ B \subset B_\epsilon(A)\}$$

其中 $B_\epsilon(\square) := \{x \in E : d(x, \square) < \epsilon\}$.

(3) 证明度量空间 $(\chi, d_{\mathcal{H}})$ 是完备可分的，称为 E 的 **Gromov-Hausdorff 空间**.

(4) 现令 $f_1, \cdots, f_n$ 为 E 上 n 个压缩映射. 定义 $(\chi, d_{\mathcal{H}})$ 上的映射 T 为

$$T(A) := \bigcup_{k=1}^{n} f_k(A), \quad A \in \chi$$

证明 T 是压缩映射，并由此导出存在唯一的一个紧子集 K，使得 $T(K) = K$，称为 Gromov-Hausdorff 空间的不动点.

问题 10 (常微分方程唯一解). 考虑如下常微分方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{9}$$

我们将其转化为如下积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s$$

视上式右侧为 x 的“泛函”，记为 $T[x]$.

(1) 设二元函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且关于 x 满足 Lipschitz 条件, 证明: 在点 (x_0, t_0) 的某邻域, 上述方程有且仅有一条积分曲线[23]. [提示: 利用定理2.1.]

(2) 记 (a) 中积分曲线参量 t 存在区间为 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$，以 $x_\pm := x(t_0 \pm \delta)$ 为初始条件，将上述解延拓至整个实数轴 $\mathbb{R}$.

[23]参见 [**22**].

CHAPTER 2

赋范线性空间与 Banach 空间

旨趣. 实复分析与微分方程中提供给赋范线性空间足够的例子, 因此我们将其中的结构抽象出来统一讨论蕴含, 它蕴含两种基本结构, 即度量拓扑与线性结构. 其中最重要的当属空间的完备性, 事实上我们研究的大部分赋范空间都是完备的, 此外其上连续线性泛函构成的空间 (称为对偶空间) 一定完备, 第6、7、8章中将多次研究对偶空间的完备性. 此外, 赋范空间一个在有限维与无限维上有本质的区别, 这个差异被著名的 Riesz 定理 (定理1.3) 刻画, 即无限维赋范空间的有界闭集一定非紧! 然而, 我们将在第8章中利用 Banach-Alaoglu 定理 (定理**??**) 说明对偶空间 X^* 中 w^*-拓扑下闭单位球的紧性.

1. 赋范线性空间中的基本概念

回忆实分析中一般测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 蕴含测度 μ 有某些双射不变性, 进而容易讨论积分, 配合代数结构 (例如拓扑群) 时还要求群作用不变性 (称为 Haar 测度). 泛函分析中基本代数结构是向量空间, 因此进一步要求与代数结构适配的度量, 体现在**数乘不变性**和**平移不变性**上, 即若 $x, y, z \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, 其中 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的度量向量空间, 进而要求

$$d(x+z, y+z) = d(x, y), \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

我们将度量满足平移不变性的空间称为 **F-空间**，参见 [**17**].

1.1. 赋范空间及其例子.

1.1.1. 赋范空间的定义与例子.

定义 1.1. 设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，称 X 上的映射 $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个**半范数**，如果满足

(1) **齐次性** $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$;
(2) **三角不等式** $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X$.

称 p 是一个**范数**，如果还满足 $p(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 称 (X, p) 为**赋范空间**，此时 p 记为 $||-||$.

注 1.1. (1) 由定义可知赋范空间 $(X, ||-||)$ 在如下度量

$$d(x, y) := ||x - y||$$

下成为度量空间，因此赋范空间继承第1章中所有度量空间的性质，特别地，在范数诱导拓扑下的收敛，称为**依范数** $||-||$ **收敛**. 同时我们称完备的赋范空间为 **Banach 空间**.

(2) 度量不一定能诱导范数，例如第1章度量空间例1.4的度量.

此外，第1章中例1.3、例1.5上的度量还是一个范数，分别称为 $\mathcal{L}^p$ 范数 (记为 $||-||_p$)，和**一致范数**.

定义 1.2. 在定义1.1的设定下，若 X 上存在乘法 $\cdot$ 构成环，则称 X 是一个**赋范 $\mathbb{K}$-代数**；进一步若 X 为 Banach 空间，则称 X 为 **Banach 代数**.

实分析告诉我们，$\mathcal{L}^1$ 赋予卷积 $*$ 运算后成为一个 Banach 代数，见问题17，参见 [**3, 14**].

例 1.1. n 维向量空间 $\mathbb{K}^n$，其上可以赋予范数:

(1) $||x||_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$;
(2) $||x||_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$;
(3) $||x||_\infty := \max_{1 \leq k \leq n}\{|x_k|\}$.

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

例 1.2. 设 $M_n(\mathbb{K})$ 为全体 $n \times n$ 规格的 $\mathbb{K}$ 变量矩阵空间，可定义两种范数

(1) (算子范数) $||A|| := \sup_{|x|\leq 1,\ x\in\mathbb{K}} |Ax|$;
(2) (标准范数) $||A|| := \mathrm{tr}\,(AA^*)^{1/2}$.

1.1.2. *收敛与绝对收敛*. 赋范空间 $(X, ||-||)$ 中可列个向量相加的形式和 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 可以用以下部分和的极限刻画：

$$\lim_{N\to\infty} S_N := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

称为赋范空间中的**级数**.

定义 1.3. (1) 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **收敛**，如果部分和序列 (S_N) 依范数 $||-||$ 收敛. 若 (S_N) 为 Cauchy 序列，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 级数.
(2) 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **绝对收敛**，如果数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ 收敛.

定理 1.1. 赋范空间 $(X, ||-||)$ 是完备的当且仅当绝对收敛的级数收敛.

证明. 必要性根据定义验证即可,留作习题. 下证充分性. 取 Cauchy 列 (x_n)，则存在子列 (x_{n_k}) 满足

$$||x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|| \leq 2^{-k}$$

进而数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_{n_k} - x_{n_{k+1}}||$ 收敛，即 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$ 绝对收敛，由条件知其收敛，进而子列 (x_{n_k}) 收敛，故 Cauchy 列收敛. □

练习 1.1. 证明上述定理的必要性.

1.2. 范数的等价性.

1.2.1. *有限维赋范空间*. 从之前的若干例子中可以看出同一集合可以赋予不用的范数成为不同的赋范空间，不同的范数可能诱导不同的度量，进而生成不同的拓扑. 注意到不同度量诱导的拓扑是可比的，由如下概念保证.

定义 1.4. 给定集合 X 上两个不同范数 p, q，称 p **强于** q，如果存在常数 $C > 0$，使得

$$q(x) \leq Cp(x)$$

称 p, q **等价**，如果 q 还强于 p，即还存在常数 $c > 0$，使得

$$cp(x) \leq q(x) \leq Cp(x)$$

注 1.2. 由定义可知更强的范数诱导更粗糙的拓扑，因此在强范数下收敛的概念在弱范数下也收敛.

配合 Heine 归结原理，我们可以刻画赋范空间间的连续嵌入 (回忆定义1.3). 即设 $(X, p), (Y, q)$ 为赋范空间，线性单射

$$f : X \to Y$$

为**连续嵌入**，如果若依范数 p 收敛序列 (x_n) 蕴含序列 $(f(x_n))$ 依范数 q 收敛.

练习 1.2. (1) $f : (X, p) \to (Y, q)$ 为连续嵌入，当且仅当单射 f 满足：存在常数 $C > 0$ 使得

$$q(f(x)) \leq Cp(x), \quad \forall x \in X$$

(2) 一般地，f 连续当且仅当存在常数 $C > 0$ 使得

$$q(f(x)) \leq Cp(x), \quad \forall x \in X$$

显然，同一向量空间 X，若 p 范数强于 q 范数，则存在自然的连续嵌入 $(X, p) \to (X, q)$. 等价范数的分析学性质一致，并且诱导的拓扑也相同，我们几乎不作区分. 事实上对于有限维赋范空间，我有如下深刻的定理，它蕴含有限维空间度量拓扑的结构的简单性.

定理 1.2. 有限维赋范空间上的范数均等价.

证明. 设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间. 记 $\{e_k\}_{k=1}^n$ 为一组基，则存在线性同构

$$\Phi : \mathbb{K}^n \to X, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x := \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

设 $||-||$ 为 X 上范数，由三角不等式得

$$\begin{aligned}||x|| &\le \sum_{k=1}^{n} x_k||e_k|| \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n}||e_k||\right)\max_{1\ge k\ge n}\{|x_k|\} \\ &= C\cdot||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty\end{aligned}$$

其中 $C>0$. 因此实值函数

$$\varphi:(\mathbb{K}^n,||-||_\infty)\to[0,\infty)$$

其中 $\varphi((x_1,\cdots,x_n)) := ||x|| = ||\Phi((x_1,\cdots,x_n))||$ 是连续[1]的. 由于 $(\mathbb{K},||-||_\infty)$ 中闭单位球面为紧集，故 φ 在其上取最小值 c，由范数正定性可知 $c>0$. 又单位闭球面上的点 $(x_1,\cdots,x_n)\ne 0$，因此

$$\frac{(x_1,\cdots,x_n)}{||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty}$$

在球面上，故

$$||x||=\varphi((x_1,\cdots,x_n))=||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty\cdot\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_n)}{||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty}\right)\ge c\cdot||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty$$

我们有

$$c\cdot||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty\le||x||\le C\cdot||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty$$

因此 X 上所有范数都等价. □

练习 1.3. 验证上述证明中的划线处.

注 1.3. 上述证明通过建立与标准向量空间 $\mathbb{K}^n$ 的线性同构 Φ 实现.

练习 1.4. 证明有限维赋范空间完备. 而完备子空间是闭集，进而任一赋范空间的完备子空间一定是闭子空间.

练习 1.5. 证明有限维赋范空间中的任一有界闭集为紧集.

---

[1]回顾连续嵌入的定义，证明之.

1.2.2. 无限维赋范空间. 以下定理直接指明赋范空间有限与无限维的差异，另一个反常的现象可见练习1.2.

定理 1.3 (Riesz). 设 $(X, ||-||)$ 为赋范空间，则 X 是有限维的当且仅当 $(X, ||-||)$ 上的闭单位球是紧的.

注 1.4. 由定理可知，无限维赋范空间中的有界闭集不紧. 进而无限维赋范空间一定不是局部紧的 Hausdorff 空间[2].

为此我们需要一个引理.

引理 1.1. 设 $(X, ||-||)$ 为赋范空间, F 是 X 的闭子空间且 $F \neq X$. 那么对任意 $\epsilon > 0$，存在 $e \in X$，使得 $||e|| = 1$ 且满足 $d(e, F) \geq 1 - \epsilon$.

证明. 由 $F \neq X$，取 $x \in X - F$，又由 F 为闭集可知

$$d := d(x, F) = \inf\{||d - z|| : z \in F\}$$

取 $y \in F$, 使得 $d \leq ||x - y|| \leq d/(1-\epsilon)$, 并设 $e = \frac{x-y}{||x-y||}$, 于是 $e (\notin F)$ 为单位向量. 任取 $z \in F$，有

$$||e - z|| = ||\frac{x-y}{||x-y||} - z|| = \frac{1}{||x-y||} \cdot ||x - y - ||x-y|| \cdot z|| \geq \frac{1-\epsilon}{d} \cdot d = 1 - \epsilon$$

□

定理1.3的证明. 必要性见练习1.5. 下证充分性. 设 X 无限维. 取 X 中单位向量 e_1，设

$$F_1 := \mathbb{K}x_1 := \{\lambda x_1 : \lambda \in F\}$$

由练习1.4，F_1 为 X 闭子空间. 又 X 无限维，结合引理1.1，存在单位向量 $x_2 (\notin F_1)$，使得 $d(x_2, F_1) \geq \frac{1}{2}$ 在记 x_1, x_2 生成子空间 F_2，存在 $x_3 \notin F_2$，使得 $d(x_3, F_2) \geq \frac{1}{2}$ 以此类推，我们有 $d(x_{n+1}, F_n) \geq \frac{1}{2}$ 于是得到一列单位向量 $(x_n)_{n \geq 1}$ 满足

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{2}, \quad i \neq j$$

因此 (x_n) 不存在收敛子列，与单位球面的紧性矛盾！上述 (x_n) 的选取依赖无限维. □

---

[2]称 Hausdorff 空间 X 是**局部紧**的，如果每点存在紧的邻域，简为记 LCH 空间

2. 连续线性映射

2.1. 有界线性算子. 首先我们回顾线性代数中线性映射的概念.

定义 2.1. 设 X,Y 为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间. 映射 $u:X\to Y$ 是**线性的**，如果

$$u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y),\quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ x,y\in X$$

进而称 u 为线性映射或**线性算子**. 并令 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为全体从 X 到 Y 的线性算子构成的集合. 特别地，当 $X=Y$ 时，简记 $\mathcal{L}(X)$.

同样有线性算子 u 的**核空间**

$$\mathrm{ker}u:=\{x\in X:u(x)=0\}$$

并且 u 为单射当且仅当 $\mathrm{ker}u=\{0\}$.

赋范线性空间一个好处是算子的连续性可以被有界性特征.

命题 2.1. 在定义2.1的设定下，以下命题互相等价:

(1) u 在 X 上连续;

(2) u 在 X 上某一点连续;

(3) u 在 X 的原点 O 处连续;

(4) 存在 $C\geq 0$，使得对任意 $x\in X$，有 $||u(x)||\leq C||x||$.

证明. 由向量空间的定义, (1)(2)(3) 互相等价, 并且 (4) $\Longrightarrow$ (1) 是显然的，留作习题. 故只证明 (3) $\Longrightarrow$ (4).

设 u 在原点 O 处连续，则存在 $r_0>0$，使得 $||u(y)||\leq 1$, $\forall y\in\overline{B(0,r_0)}$. 任取 $(0\neq)x\in X$，并设 $y=r_0\frac{x}{||x||}$，于是 $y\in\overline{B(0,r_0)}$，进而

$$||u(y)||=\left|\left|u\left(r_0\frac{x}{||x||}\right)\right|\right|\leq 1$$

从而

$$||u(x)||\leq\frac{||x||}{r_0}$$

取 $C=\frac{1}{r_0}$ 得证. □

练习 2.1. 证明上述命题中 (1)(2)(3) 互相等价，以及 (4) $\Longrightarrow$ (1).

定义 2.2. 在定义2.1的设定下，称 u 是**有界线性算子**，如果对任意 $x \in X$，都存在常数 $C \geq 0$，使得

$$||u(x)|| \leq C||x||$$

令

$$||u|| := \sup_{x\in X,\ x\neq 0} \frac{||u(x)||}{||x||}$$

为 u 的**算子范数**. 并记全体从 X 到 Y 的有界线性算子构成的集合为 $\mathcal{B}(X, Y)$. 特别地，当 $X = Y$ 时，记为 $\mathcal{B}(X)$.

练习 2.2. 验证范数 $||u||$ 可以等价定义为

$$||u|| = \sup_{x\in X,\ ||x||\leq 1} ||u(x)|| = \sup_{x\in X,\ ||x||=1} ||u(x)||$$

并且对任意 $x \in X$，有 $||u(x)|| \leq ||u|| \cdot ||x||$. 这里的 $||u||$ 就是上述定义中的最佳常数 C.

练习 2.3. 证明 $\mathcal{B}(X, Y)$ 是赋范线性空间.

定理 2.1. 当 Y 为 Banach 空间时，$\mathcal{B}(X, Y)$ 成为 Banach 空间.

证明，SKETCH. 取 (u_n) 为 $\mathcal{B}(X, Y)$ 中 Cauchy 列，任取 $x \in X$，有

$$||u_m(x) - u_n(x)|| \leq ||u_m - u_n|| \cdot ||x||$$

进而 $(u_n(x))$ 为 Y 中 Cauchy 列，由 Y 完备可知存在极限. 对每点 x，不妨记极限为 $u(x)$，因此我们逐点确定算子 u.

(1) 验证 u 为线性算子，留作习题.

(2) 验证 u 为有界算子. 注意到

$$||u(x) - u_n(x)|| \leq \lim_m ||u_m - u_n|| \cdot ||x||$$

进而 $u = u_n + (u - u_n)$ 有界.

(3) 验证 u 为极限算子. 利用上式，取 $||x|| = 1$，于是

$$||u(x) - u_n(x)|| \leq \lim_m ||u_m - u_n|| \to 0$$

即可.

□

练习 2.4. 验证上述证明中的 (1).

有限维空间的另一个直观的结果是所有线性映射连续.

命题 2.2. 设 X 为有限维赋范空间，Y 为任一赋范空间，则所有从 X 到 Y 的线性映射都连续，即 $\mathcal{L}(X,Y)=\mathcal{B}(X,Y)$.

证明，SKETCH. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 X 的一组基. 对任意 $x\in X$，都有 $x-\sum_{i=1}^n x_ie_i$，其中 $x_i\in\mathbb{K}$. 取 $u\in\mathcal{L}(X,Y)$ 由定理1.2，存在常数 C，使得

$$||u(x)||\leq\left(\sum_{i=1}^n ||u(e_i)||\right)\cdot||x||_\infty\leq C\left(\sum_{i=1}^n ||u(e_i)||\right)\cdot||x||$$

这说明 u 有界. □

推论 2.1. $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ 是一个 Banach 空间. 并称 $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ 为 X 的**对偶空间**，记为 $\mathcal{B}^*$，其中元素称为**连续线性泛函**.

2.2. Banach 代数. 我们已经知道有界线性算子容易构成 Banach 空间，下面为算子赋予乘法 $\cdot$ 使之成为 Banach 代数.

命题 2.3. 设 X,Y,G 为赋范空间，且 $u\in\mathcal{B}(X,Y)$，$v\in\mathcal{B}(Y,G)$，于是复合映射 $v\circ u\in\mathcal{B}(X,G)$，并且

$$||v\circ u||\leq||v||\cdot||u||$$

证明，SKETCH. 留作习题. □

练习 2.5. 证明上述命题.

往后我们将 $v\circ u$ 简记为 vu，并看称算子的**乘法**. 容易验证 $\mathcal{B}(X)$ 在加法与上述乘法下构成一个代数，并且当 $\mathcal{B}(X)$ 为 Banach 空间时成为一个 Banach 代数. 并且可以考虑极限运算，即

$$\lim_n u_n=u,\ \lim_n v_n=v$$

进而

$$\lim_n u_nv_n=uv$$

练习 2.6. 证明上述论断.

此外，约定代数 $\mathcal{B}(X)$ 中的幂运算

$$u^0 = \mathrm{I}_X; \quad u^{n+1} = u^n u,\ n \geq 1$$

定理 2.2. 设 X 为 Banach 空间，令 $u \in \mathcal{B}(X)$ 且 $||u|| < 1$，那么存在 $v \in \mathcal{B}(X)$，使得

$$(\mathrm{I}_X - u)v = v(\mathrm{I}_X - u) = \mathrm{I}_X$$

这意味着 $\mathrm{I}_X - u$ 为同构，即在代数 $\mathcal{B}(X)$ 中可逆.

证明. 考虑 $\mathcal{B}(X)$ 中级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$，于是

$$||u^n|| \leq ||u||^n$$

由于 $||u|| < 1$，进而 $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ 绝对收敛，由定理1.1，进而收敛，记其极限为 $v \in \mathcal{B}(X)$，即

$$v = \lim_n \sum_{k=1}^{n} u^k$$

那么

$$(\mathrm{I}_X - u)v = \lim_n (\mathrm{I}_X - u) \sum_{k=0}^{\infty} u^k = \lim_n (\mathrm{I}_X - u^{n+1}) = \mathrm{I}_X$$

同理有 $v(\mathrm{I}_X - u) = \mathrm{I}_X$. 因此 v 为 $\mathrm{I}_X - u$ 的逆映射. □

线性代数与矩阵论为算子理论提供了基本的例子，它们大多是有限维的，参见 [**31**]，我们稍后会见到无限维矩阵的例子，见问题15.

例 2.1. 设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间，熟知 $\mathcal{L}(X)$(X 上全体线性变换) 与矩阵空间 $M_n(\mathbb{K})$ 代数同构. 这个同构由给定 X 上的一组基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 确定：对任意 $x \in X$，有表示 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$，进而定义 u 的作用为

$$u(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$$

我们记 $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \in \mathbb{K}^n$，进而 u 唯一确定矩阵

$$[u] := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

容易验证 $u \mapsto [u]$ 是代数同构，其中 u 的乘法为映射的复合，矩阵的乘法为通常的乘法.

练习 2.7. 验证上述代数同构 $u \mapsto [u]$.

关于有界线性算子，分析学中一个常用的技巧是在一个空间的稠密子空间 (一般更易处理) 上讨论性质，再将其延拓到整个空间，注意这个延拓是**保范的** (见第7章1.3.2小小节). 以下定理保证延拓的合理性.

定理 2.3. 设 X, Y 为 Banach 空间，G 为 X 的稠密子空间，则任意有界线性算子 $u : G \to Y$ 可以唯一地延拓地成为有界线性算子 $\tilde{u} : X \to Y$，并且 $||u|| = ||\tilde{u}||$.

证明，SKETCH. 任取 $x \in X$，由 G 稠密，存在序列 $(x_n) \subset G$ 使得 $\lim_n x_n = x$. 并且

$$||u(x_m) - u(x_n)|| \leq ||u|| \cdot ||x_m - x_n|| \to 0, \quad m, n \to \infty$$

故 $(u(x_n))$ 为 Y 中 Cauchy 列，由 Y 的完备性可知存在极限 y. 定义

$$\tilde{u}(x) := y = \lim_n u(x_n)$$

显然 $\tilde{u}$ 是线性的，留作习题. 此外，我们有

$$||\tilde{u}(x)|| = \lim_n ||u(x_n)|| \leq \lim_n ||u|| \cdot ||x_n|| = ||u|| \cdot ||x||$$

因此 $\tilde{u}$ 有界且 $||\tilde{u}|| = ||u||$. 又由于

$$||u|| = \sup_{x \in G,\ x \neq 0} \frac{||u(x)||}{||x||} \leq \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{||u(x)||}{||x||} = ||\tilde{u}||$$

故 $||u|| = ||\tilde{u}||$. $\square$

练习 2.8. 验证上述证明中 $\tilde{u}$ 是线性的.

3. Banach 空间范畴

我们将域 $\mathbb{K}$ 上全体向量空间连同线性映射作为态射视为一个范畴,记为 $(\mathbb{K}-\mathcal{VEC},\mathcal{L})$; 同时,将全体 Banach 空间连同连续线性映射作为态射视为一个范畴,称为 **Banach 空间范畴**,记为 $(\mathcal{BAN},\mathcal{LCONTI})$. 可以发现 $\mathcal{BAN}$ 作为 $\mathbb{K}-\mathcal{VEC}$ 的子范畴,同时也成为 $(\mathcal{MEC},\mathcal{CONTI})$ 的子范畴. 但注意这个范畴是加性范畴但不是 Abel 范畴, 参见 [**34**].

事实上,我们也可以将线性等距嵌入作为态射,此时记为 $(\mathcal{BAN},\mathcal{LISO})$, 不难看出它成为 $(\mathcal{MEC},\mathcal{ISO})$ 的子范畴, 此时简称 Banach 空间之间的线性等距同构为**同构**.

我们在2.2小节中介绍了将空间 $\mathcal{B}(X)$ 视为一个代数, 连同两个 Banach 代数之间的连续的代数同态作为态射成为一个范畴,称为 **Banach 代数范畴**, 记为 $(\mathcal{BANA},\mathcal{AHOMOCONTI})$, 同时 $\mathcal{BANA}$ 也可视为 $\mathcal{BAN}$ 的子范畴.

习题二

¶ 无限维空间的基.

问题 11 (Hamel 基). 设 E 为域 $\mathbb{K}$ 上的无限维线性空间. 设 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 E 中一组向量，若 E 中任一向量 x 可用 $\{e_i\}_{i\in I}$ 中有限个向量唯一线性表示，即对任意 $x\in E$，存在唯一一组 $\{\alpha_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{K}$，使得仅有有限多个 α_i 不等于零且 $x=\sum_{i\in I}\alpha_i e_i$，则称 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 E 中的 **Hamel 基**.

(1) 用 Zorn 引理证明 E 有一组 Hamel 基.
(2) 假设 E 还是一个赋范空间，证明 E 上必存在不连续的线性泛函.
(3) 证明在任一无限维赋范空间上，一定存在一个比原来的范数严格 (即拓扑不相同) 强的范数. 由此说明若线性空间 E 上任意两个范数诱导同一个拓扑，则 E 必为有限维空间.

问题 12 (Schauder 基). 设 $(E,||-||)$ 为赋范空间，$\{e_n\}_{n\geq 1}$ 为可数向量组. 若对任意 $x\in E$，可被唯一表示成 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$，其中 $x_n\in\mathbb{K}$. 其中无限求和指的是如下范数收敛:

$$\lim_n\left|\left|\sum_{k=1}^{n}x_ke_k-x\right|\right|=0$$

则称 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 为 E 的一个 **Schauder 基**.

(1) 设 E 为存在 Schauder 基的 Banach 空间，则 E 可分.
(2) 利用 (1) 的结果证明 l^p 可分，其中 $p<\infty$.

一个问题是: 任一可分的 Banach 空间是否一定具有 Schauder 基? 答案是否定的，1973 年 Enflo 给出反例，参见 Enflo, Per. "A counterexample to the approximation problem in Banach spaces." (1973): 309-317..

¶ 赋范空间中的凸集. 我们称赋范空间 $(E,||-||)$ 是**严格凸**的，如果对任意单位向量 $x,y\in E$，满足

$$||\lambda x+(1-\lambda)y||\leq 1$$

称**一致凸**的，如果对任意 $0<\epsilon<2$，存在 $\delta>0$，使得对任意单位向量 $x,y\in E$ 满足 $||x-y||>\epsilon$，都有

$$||x+y||<2-\delta$$

问题 13. (1) 证明：一致凸的赋范空间一定严格凸.

(2) 设 E 为 Banach 空间，C 为 E 的凸闭子集，$x\in E$，记 $d=d(x,C)$，证明：
   (a) 若 E 严格凸，则至多存在一个元素 $y\in C$，使得 $||y-x||=d$；
   (b) 若 E 一致凸，则存在唯一元素 $y\in C$，使得 $||y-x||=d$；
   (c) 若 E 严格凸且 $\dim(E)<\infty$，则 E 一致凸；
   (d) 若 E 严格凸，$e_1,\cdots,e_n\in E$ 线性无关，则存在唯一序列 $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n$，使得

$$||x-\sum_{k=1}^{n}x_ke_k||$$

   达到最小值. 称 $\sum_{k=1}^{n}x_ke_k$ 为 x 关于 $||-||$ 的**最佳逼近元素**.

问题 14 (Schauder 不动点定理的证明). 本习题意图给出定理2.3的一个证明.

(1) 利用 K 的紧性取有限 ϵ-网 $\{x_1,\cdots,x_N\}$. 构造 K 上的函数

$$\rho_i:=\begin{cases}\epsilon-d(x,x_i), & d(x,x_i)\le\epsilon\\ 0, & d(x,x_i)>\epsilon\end{cases},\quad i=1,\cdots,N$$

以此构造 $K\to K$ 的映射

$$\rho_\epsilon(x):=\frac{\sum_{i=1}^{N}\rho_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^{N}\rho_i(x)}$$

验证：ρ_ϵ 是良定义且连续的映射，并且满足

$$d(\rho_\epsilon(x),x)<\epsilon,\quad\forall x\in K$$

(2) 定义 n 维线性空间 $V_n:=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_N\}$，以及**凸包** conv：

$$K_\epsilon:=\mathrm{conv}(x_1,\cdots,x_n)(\subset V_n)$$

验证：

$$f_\epsilon : \rho_\epsilon \circ f : K_\epsilon \to K_\epsilon$$

是连续的，进而利用定理2.1说明存在唯一不动点，记为 x_ϵ. (由于 K 是凸集，故 $K\epsilon \subset K$.)

(3) 说明

$$\inf\{d(x, f(x)) : x \in K\} = 0$$

进而由 K 的紧性说明上述最小值可取到，进而存在 f 的不动点. [提示：注意到

$$d(x_\epsilon, f(x_\epsilon)) = d(f_\epsilon(x_\epsilon), f(x_\epsilon)) = d(\rho_\epsilon(f(x_\epsilon)), f(x_\epsilon)) < \epsilon$$

]

¶ 线性代数与矩阵论.

问题 15 (无限维矩阵). 设 $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ 为元素取自域 $\mathbb{K}$ 的无穷维矩阵. 定义任意有穷序列 $x = (x_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{K}$，即 x_j 仅有有限个非零. A 的作用为

$$A(x) = \left(\sum_{j\geq 1} a_{ij} x_j\right)_{j\geq 1}$$

(1) 证明 A 可以拓展成 l^∞ 上的有界线性映射当且仅当

$$||A||_\infty := \sup_{i\geq 1} \sum_{j\geq 1} |a_{ij}| < \infty$$

在此情形下，我们有

$$||A||_{\mathcal{B}(l^\infty)} = ||A||_\infty$$

故 A 定义了 l^∞ 上的线性映射.

(2) 证明 A 可以拓展成 l^∞ 上的有界线性映射当且仅当

$$||A||_1 := \sup_{j\geq 1} \sum_{i\geq 1} |a_{ij}| < \infty$$

在此情形下，我们有

$$||A||_{\mathcal{B}(l^1)} = ||A||_1$$

故 A 定义了 l^1 上的线性映射.

(3) 假设 $||A||_\infty, ||A||_1 < \infty$，证明 A 可以拓展为 l^2 上的有界线性映射且

$$||A||_{\mathcal{B}(l^2)} \leq ||A||_\infty^{1/2} \cdot ||A||_1^{1/2}$$

[提示：写成如下形式

$$\sum_{i,j\geq 1} |a_{ij}||x_i||y_j| = \sum_{i\geq 1} |x_i| \sum_{j\geq 1} |a_{ij}|^{1/2} \cdot |a_{ij}|^{1/2}|y_j|$$

然后对内部的乘积式应用 Cauchy-Schwarz 不等式；再次应用 Cauchy-Schwarz 不等式证明.]

(4) 在 (3) 的条件下，A 是否能对任意 $1 < p < \infty$ 拓展成 l^p 上的有界线性映射?

问题 16. 本习题希望将线性代数与矩阵论中的线性群论推广到泛函分析. 回忆一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 可以赋予合适的拓扑成为流形，例如 Zariski 拓扑. 回忆**拓扑群**的概念，称拓扑空间 G 是一个**拓扑群**，其拓扑记为 τ_G，如果 G 在乘法运算 $\cdot$ 下构成群，并且

$$G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x \cdot y; \quad G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$$

连续. 设 E 为 Banach 空间

(1) 用 $\mathrm{GL}(E)$ 表示 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆元构成的集合. 证明 $\mathrm{GL}(E)$ 关于复合运算构成拓扑群，其拓扑继承为 $\mathcal{B}(E)$ 的子拓扑.

(2) 证明 $u \to u^{-1}$，$u \to v^{-1}uv$，其中 $v \in \mathrm{GL}(E)$，是 $\mathrm{GL}(E)$ 的自同胚.

¶ Banach 代数的构造.

问题 17. 本习题希望回忆实分析中的卷积 $*$ 运算，并将 $\mathcal{L}^1$ 空间构造成为 Banach 代数，回顾问题3和问题4，我们已经证明 $\mathcal{L}^1$ 是一个 Banach 空间. 取 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathrm{m})$ 为 Lebesgue 测度空间，并设 $f, g \in \mathcal{L}^(\mathbb{R})$，定义**卷积** $*$ 为

$$f * g := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{dm}$$

证明 **Young 不等式**：

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$$

以此说明 $f * g \in \mathcal{L}^1$.

CHAPTER 3

内积空间与 Hilbert 空间

旨趣. 相比赋范空间，内积空间是结构更丰富的空间，在几何中可以定义向量的夹角与平行四边形的面积. 分析中更感兴趣的是完备的内积空间，即 Hilbert 空间，我们将刻画这个空间中的闭凸集极小元 (对应几何上的逼近) 以及子空间的正交分解，后者统一分解现代分析与几何中诸多对象，见小小节2.2.2. 此外 Hilbert 空间 H 存在自然的对偶定理，即 $H \cong H^*$(Riesz 表示定理，见定理3.2)，它将空间 H 自身的元素与其上连续线性泛函等同，并且基于该对偶可以更简洁地刻画第8章中的共轭算子 (见定理**??**). 最后，我们介绍 Hilbert 空间中的完备正交系，一个惊喜的结果是利用一般的 Fourier 变换算子 $\mathcal{F}$ 可以建立同构

$$\mathcal{F} : H \to l^2(I)$$

后者用更简单的方式展示了空间 H 的结构，其中著名的一维 Fourier 级数逼近论、Weierstrass 第二逼近定理 (我们将在第5章中再次证明) 以及 Sturm-Liouville 理论都可以视为这个同构的直接应用.

1. 内积空间中的基本概念

1.1. 内积空间的定义与例子.

1.1.1. *内积空间的定义.* 我们知道，欧式空间 $\mathbb{K}^n$ 中有角度与面积的概念，这是一般赋范空间不具备的. 下面希望为空间赋予这两个概念.

定义 1.1. 设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，称双线性函数

$$u : X \times X \to \mathbb{K}$$

是一个**半内积**，如果满足

I1 **线性性**

$$u(\lambda x + \mu y, z) = \lambda u(x,z) + \mu u(y,z), \quad \forall x, y \in X,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

I2 (共轭) **对称性** $u(x,y) = \overline{u(y,z)}$, $\forall x, y \in X$;

I3 **非负性** $u(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.

此时称 (X, u) 为一个**半内积空间**. 称半内积 u 是一个**内积**，往后记为 $< -, - >$，如果满足：$< x, x >= 0$ 当且仅当 $x = 0$. 此时称 $(X, < -, - >)$[1]为一个**内积空间**.

注 1.1. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时，u 关于第二个分量的线性性为共轭线性，即

$$u(x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda} u(x,z) + \overline{\mu} u(y,z), \quad \forall x, y \in X,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

定理 1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式). 设 (X, u) 为半内积空间，则有

$$|u(x,y)|^2 \leq u(x,x) \cdot u(y,y), \quad \forall x, y \in H$$

并且取等号“=”当且仅当 x 与 y 成比例，即存在 $(0 \neq)\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$x = \lambda y$$

---

[1]本章中简记为 X.

证明. 设 $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$，考察

$$
\begin{aligned}
0 &\le u(x-\lambda y, x-\lambda y) \\
&= u(x,x) - 2\mathrm{Re}(\lambda u(y,x)) - |\lambda|^2 u(y,y)
\end{aligned}
$$

其中 Rez 表示复数 z 的实部. 事实上，上式中的

$$2\mathrm{Re}(\lambda u(y,x)) = \alpha u(y,x) + \overline{\lambda} u(x,y)$$

我们回忆**符号函数** sgn 的概念，即

$$\mathrm{sgn}k := \begin{cases} \frac{k}{|k|}, & z \in \mathbb{K} \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

特别地，当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时，就是取单位复数 $e^{i\theta}$，其中 θ 表示复数 k 的辐角；当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时，就是取实数的正负号.

将 $< y, x >$ 写作 $B\mathrm{sgn} < y, x >$，λ 写作 $t\mathrm{sgn}\lambda$，进而 $B, t \in \mathbb{R}$. 以及令 $A =< y, y >$，$C =< x, x >$. 特别地，取 $\mathrm{sgn}\lambda = e^{-i\theta} = \overline{\mathrm{sgn} < y, x >}$. 进而

$$0 \le u(x,x) - 2\mathrm{Re}(\lambda u(y,x)) - |\lambda|^2 u(y,y) = C - 2Bt + At^2 =: q(t)$$

注意到 $q(t)$ 是关于实变量 t 的非负二次函数 (不失一般性，不妨 $A > 0$)，根据判别式

$$\Delta = B^2 - 4AC \le 0$$

即证. 不难看出，取等号当且仅当 $x = \lambda y$, $(0 \neq)\lambda \in \mathbb{R}$. □

练习 1.1. 完善上述不等式中取等号情形的证明.

Cauchy-Schwarz 不等式一个直接的用途是说明 (半) 内积可以诱导 (半) 范数 (准确而言是证明三角不等式), 即在 (半) 内积空间 (X, u) 中，令

$$p(x) := u(x,x)^{1/2}, \quad x \in X$$

其中半范数 p 性质的验证是直接的，留给读者补充. 进而称 p 为 (半) **内积诱导的** (半) **范数**，此时

(10) $(X, ||-||)$ 成为一个赋范空间.

，如果 $p = ||-||$ 是一个范数. 若范数完备则称为 X 为 **Hilbert 空间**，本章中若无其他说明，简记 Hilbert 空间为 H. 此外，同样可以验证

(11)
内积函数 $<-,->$ 的每个分量映射 (见第6章推论2.2) 在上述范数诱导的拓扑下连续.

注意，一般两个赋范空间的笛卡尔积 $X \times Y$ 上的线性映射称为双线性映射, 每个分量映射连续不一定蕴含整个双线性映射连续, 第6章推论2.2证明当 X, Y 完备时双线性映射是连续的，因此 Hilbert 空间上的内积函数是双线性的连续泛函. 一般地，半内积函数 u 在上述半范数 p 诱导的拓扑下每个分量连续，见第4章.

练习 1.2. 证明上述论断 (10) 和论断 (11).

1.1.2. 内积空间的例子. 第1章的例子中，例1.3中的 $\mathcal{L}^2$ 是内积空间，其中内积 (定义的良性由 Hölder 不等式保证，即若 $f, g \in \mathcal{L}^2$，则 $f\overline{g} \in \mathcal{L}^1$) 为

$$< f, g > := \int_X f \cdot \overline{g} \mathrm{d}\mu$$

其诱导的范数恰为 $||-||_2$. 此外 $l^2(\mathbb{N}) = \mathbb{K}^\infty$ 为内积空间，内积为

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

特别地，$l^2(n) := l^2(I) = \mathbb{K}^n$ 为内积空间，其中 $|I| = n$，内积为

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

上述空间都是 Hilbert 空间. 此外，例1.5中取 $X = [0,1], Y = \mathbb{K}$，可以定义内积

$$< f, g > := \int_0^1 f\overline{g}$$

但注意此内积诱导的范数下空间不是完备的，熟知 $\mathcal{L}^2$ 是它的完备化空间.

注 1.2. (1) 一种规避 $\mathbb{K}^\infty$ 中无限求和 (涉及极限) 的办法是定义集合 $\mathbb{K}$ 的弱直积 $\mathbb{K}^w$，其中

$$\mathbb{K}^w := \{(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \mathbb{K}^\infty | \text{仅有限个 } x_n \text{ 非零}\}$$

内积为 $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >:= \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}$，是有限求和.

(2) 也可以在 $\mathbb{K}^n$ 甚至 $\mathbb{K}^w$ 中定义"非自然"的内积，即

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >:= \sum_{k=1}^\infty f(k) x_k \overline{y}_k$$

其中 $f(k) \in \mathbb{K}$ 称为**权重函数**. 特别地，若存在 $f(k) = 0$，此时内积弱化为半内积；可取 $f(k) = \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{k}, \frac{1}{2^k}, k^\alpha$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 等等.

1.2. 可内积化范数. 几何中，利用内积可以妥善定义空间中向量的**夹角**和平行四边形的**面积**，例如 X 中两非零向量 x, y 夹角 θ 的余弦:

$$\cos\theta := \frac{< x, y >}{||x|| \cdot ||y||}$$

注意到定理1.1保证余弦定义的良性，这是一般范数尚不具备的，参见 [**8**]，因此一般的范数空间无法良性定义角度和面积. 一个自然的问题是: 什么样的空间是内积空间? 换言之，什么样的范数由内积诱导 (我们称该范数为**可内积化范数**)? 事实上，存在某种空间，其上不存在可内积化的范数，见问题23.

命题 1.1 (极化恒等式). 设 H 为内积空间.

(1) 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时，有

$$< x, y >= \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x|| - ||y||^2) \tag{12}$$

(2) 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时，有

$$< x, y >= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k ||x + i^k y||^2 \tag{13}$$

利用内积的定义直接验证即可，留作习题.

练习 1.3. 证明上述命题.

利用上述命题,容易验证,内积空间间的线性等距嵌入 $u: X \to Y$ 一定保内积，即

$$< u(x), u(y) >=< x, y >, \quad \forall x, y \in X$$

练习 1.4. 证明上述论断.

定理 1.2 (平行四边形公式). 设 $(X, ||-||)$ 为赋范空间. 范数 $||-||$ 可内积化，即由某个内积 $< -, - >$ 诱导，当且仅当如下**平行四边形公式**成立:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right) \tag{14}$$

证明. 必要性是显然的. 下证充分性. 只考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 的情形 ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情形是同理的)，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 利用等式13同理讨论. 定义映射

$$< -, - >: X \times X \to \mathbb{R}$$

为

$$< x, y >:= \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x|| - ||y||^2\right)$$

显然有对称性与非负性，故只要验证线性性 (固定 y，$x \mapsto < x, y >$ 线性). 分以下三步验证:

Step 1 先证有 $< 2x, y >= 2 < x, y >$. 注意到

$$\begin{aligned}
< 2x, y > &= \frac{1}{2}\left(||2x+y||^2 - ||2x|| - ||y||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(||2x+y||^2 + ||y||^2\right) - 2||y||^2 - ||2x||^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(||2x+y+y||^2 + ||2x+y-y||^2\right) - 2||y||^2 - ||2x||^2\right] \\
&= ||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 \\
&= 2 < x, y >
\end{aligned}$$

其中上式第三个等号用公式14.

Step 2 下面证明可加性 ($<x+z,y>=<x,y>+<z,y>$). 由上一步，我们有

$$
\begin{aligned}
<x,y>+<z,y> &= 2\left\langle x, \frac{1}{2}y \right\rangle + 2\left\langle z, \frac{1}{2}y \right\rangle \\
&= \left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 - ||x||^2 - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|z+\frac{1}{2}y\right\|^2 - ||z||^2 - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(||x+z+y||^2+||x-z||^2\right) - \frac{1}{2}\left(||x+z||^2+||x-z||^2\right) - \frac{1}{2}||y||^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(||x+z+y||^2-||x+z||^2-||y||^2\right) \\
&= <x+z,y>
\end{aligned}
$$

Step 3 最后验证数乘 ($<\lambda x,y>=\lambda<x,y>$). 由上一步，对任意自然数 n，有 $<nx,y>=n<x,y>$，于是

$$
\frac{1}{n}<x,y>=\frac{1}{n}\left\langle n\frac{1}{n}x, y\right\rangle = \left\langle \frac{1}{n}x, y\right\rangle
$$

从而对任意 $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$，都有

$$
\left\langle \frac{m}{n}x, y\right\rangle = \frac{m}{n}<x,y>
$$

再由内积函数的连续性，可知上述性质对全体实数成立.

$\square$

2. 正交分解

本节以及本章后两节中我们均在 Hilbert 空间 H 的框架下讨论.

2.1. 正交补与凸闭集.

2.1.1. 正交补空间.

定义 2.1. 设 H 为内积空间，称 $x, y(\in H)$ **正交**，如果

$$< x, y >= 0$$

记为 $x \perp y$，此外，对任意 $A \subset H$(特别地，A 为单点集 $\{x\}$)，称

$$A^{\perp} := \{x \in H : x \perp y,\ y \in A\}$$

为子集 A 在 H 中的**正交补**.

注 2.1. 对内积空间 H 中任一子集 A，它的正交补 $A^{\perp}$ 是 H 的线性子空间，由内积的连续性，$A^{\perp}$ 是闭子空间，并且有

$$A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp} = (\mathrm{span}A)^{\perp} = (\overline{\mathrm{span}A})^{\perp}$$

其中 $\overline{A}$ 和 $\mathrm{span}A$ 分别表示 A 的 (拓扑) 闭包和**线性包络**，即

$$\mathrm{span}A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall 1 \leq n \leq |A| \right\}$$

2.1.2. 极小元引理. 为了研究 Hilbert 空间中闭凸集的逼近性质. 首先我们引入一个基本的观察，称为 Hilbert 空间中凸闭子集的**极小元引理**，在欧式平面 $\mathbb{R}^2$ 中具有极强的几何含义.

引理 2.1 (极小元引理). 设 C 为Hilbert空间 H 的凸闭子集，则 C 中范数最小的元素是存在且唯一的，称为 C 的**极小元**.

证明. 回忆平行四边形公式，即定理1.2

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right), \quad \forall x, y \in H$$

令 $\delta := \inf\{||x|| : x \in C\}$，我们将说明 C 中存在唯一元素 x 使得 $||x|| = \delta$. 将 $x/2, y/2$ 代入上式平行四边形公式，整理得

$$\frac{1}{4}||x-y||^2 = \frac{1}{2}||x||^2 + \frac{1}{2}||y|| - \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2$$

由于 C 为凸集，于是 $\frac{x+y}{2} \in C$，进而

$$||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 - 4\delta^2$$

上式说明范数取到 δ 的元素是唯一的. 下证存在性.

取 $(y_n)_{n\geq 1} \subset C$ 使得 $||y_n|| \to \delta$. 将上式中的 x, y 替换为 y_m, y_n，于是

$$||y_m - y_n||^2 = 2||y_m||^2 + 2||y_n||^2 - 4\delta^2$$

因此 (y_n) 为 H 中 Cauchy 列，由完备性可知收敛于某点 x，又由 C 为闭集，于是 $x \in C$. 这里的 x 就是所求的极小元. □

注 2.2. 上述证明中，H 的完备性是必要的.

2.2. 正交分解.

2.2.1. *Hilbert 空间中的正交分解.*

定理 2.1 (正交分解). 设 E 为 H 的 (闭) 向量子空间. 存在唯一的一对线性映射 P, Q 使得 $P: H \to \overline{E}$ 以及 $Q \to E^{\perp}$，并且如下分解

$$x = Px + Qx, \quad \forall x \in H$$

时唯一的，一般我们记为

$$H = \overline{E} \oplus E^{\perp}$$

称为 Hilbert 空间的**正交分解**. 称 P 为子空间 M 的 (正交) **投影算子**. 此外，这对映射满足：

(1) $Px = x, Qx = 0$，如果 $x \in \overline{E}$；$Px = 0, Qx = x$，如果 $x \in E^{\perp}$.

(2) **最佳逼近**

$$||x - Px|| = \inf\{||x-y|| : y \in \overline{E}\}$$

(3) **Pythagoras 定理**

$$||x||^2 = ||Px||^2 + ||Qx||^2$$

证明. 不妨设 E 为闭子空间. 任取 $x \in H$, 作陪集 $x + E := \{x + y : \forall y \in E\}$，显然为凸闭集. 我们将 Qx 定义为 $x + E$ 中的极小元，由引理2.1，定义是良性的，进而定义 $Px = x - Qx$.

首先验证这对映射的像空间：由于 $Qx \in E$，因此 $Px \in E$，故 $P: H \to E$. 此外，要说明 $Qx \in E^{\perp}$，即说明 $< Qx, y >= 0$, $\forall y \in E$. 不失一般性，设 $||y|| = 1$，令 $z = Qx$. 由极小元的定义可知

$$< z, z >= ||z||^2 \leq ||z - \lambda y||^2 =< z - \lambda y, z - \lambda y >, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

整理得到

$$0 \leq -\lambda < y, z > -\overline{\lambda} < z, y > +|\lambda|^2$$

最后令 $\lambda =< z, y >$ 可知 $0 \leq -| < z, y > |^2$，因此 $< Qx, y >=< z, y >= 0$. 故 $Q : H \to E^{\perp}$. 同时由 E 为子空间可知 P, Q 是线性的.

再说明正交分解 $x = Px + Qx$ 是唯一的. 若还存在分解 $x = x_0 + x_1$，其中 $x_0 \in E, x_1 \in E^{\perp}$，那么

$$x_0 - Px = x_1 - Qx$$

这说明 $x_0 - Px \in E, x_1 - Qx \in E^{\perp}$，而 $E \cap E^{\perp} = \{O\}$，故只能 $x_0 = Px, x_1 = Qx$，进而唯一.

(1)(2)(3) 为映射 P, Q 性质的直接推论，留作习题. □

练习 2.1. 证明上述定理中的 (1)(2)(3).

推论 2.1. 在定理2.1的设定下，

(1) 若闭子空间 $E \neq H$，则存在 $y \in H - E$ 使得 $y \perp E$.
(2) E 为 H 的子空间，

$$(E^{\perp})^{\perp} = \overline{E}$$

一般地，我们有

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{span} A}$$

其中 A 为 H 的子集.

练习 2.2. 利用定理2.1证明上述推论.

2.2.2. 正交分解的应用概述. 下面我们不加证明地叙述 Hilbert 空间中正交分解的例子.

- **测度论**: $\mathbb{R}$ 上 σ-有限的测度 μ, 由 Radon-Nikodym 定理 (参见 [**3, 16**]), 分解为绝对连续测度 μ_{ac}、奇异连续测度 μ_{sc}、点测度 μ_{pp}:
$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$$
进而对 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu)$ 空间作分解:
$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu_{ac}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu_{sc}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu_{pp})$$
参见 [**3, 16**].
- **Hodge 理论**: 设 S 为紧黎曼曲面, 其上全体平方可积的微分形式在如下内积
$$\int_S \omega_1 \wedge *\overline{\omega}_2$$
其中 ω_1, ω_2 为微分形式, $*$ 为 Hodge $*$ 算子, 下构成 Hilbert 空间, 记为 $\mathcal{L}^2(S)$. 并且记 $\mathcal{H}$ 为全体调和微分构成的集合, 我们有如下正交分解:
$$\mathcal{L}^2(S) = E \oplus E^* \oplus \mathcal{H}$$
其中 $E := \{\mathrm{d}f : \mathrm{d}$ 为外微分算子, f 为 S 上紧支集光滑函数$\}$, $E^* := \{*\mathrm{d}f : \mathrm{d}$ 为外微分算子, f 为 S 上紧支集光滑函数$\}$. 对于黎曼流形、复流形上的 Hodge 理论, 可以参见 [**13, 23**].
- **Laplace 算子谱分解**: 熟知在偏微分方程中, $\mathbb{R}^n$ 中的无界区域上作用的 Laplace 算子 Δ 的谱性质不好, 然而在紧区域上作用是具有离散的谱, 利用 Hilbert 空间中算子的谱理论 (见第9章第3节, 或参见 [**6, 25, 2**]) 可以给出空间的分解或研究特征值. 对于流形, 当流形是紧致的时候 Laplace 算子同样有离散的谱, 进而可以研究其上的 $\mathcal{L}^2$ 空间以及谱分解的第一特征值 (与流形的 Cheeger 常数有关), 有兴趣的读者可以阅读相关的文献.
- **Sturm-Liouville 理论**:

定理 2.2. 对常微分方程齐次边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0,l) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

其中 $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$, $i = 1, 2$. 这里的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成为**特征值**，对应的解 X 称为**特征向量**. 我们有如下结论:

(1) 上述问题的所有特征值都是非负实数. 特别地，当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ 时，特征值都是正数.

(2) 不同特征值对应的特征函数彼此正交，即对不同特征值 λ, μ 对应的特征函数 X_λ, X_μ，满足

$$< X_\lambda, X_\mu >_{\mathcal{L}^2((0,l))} = 0$$

(3) 所有特征值组成一个单调递增以无穷远点 ∞ 为极限的序列:

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

(4) 任意函数 $f \in \mathcal{L}^2((0,l))$ 可以按特征函数系展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

其中

$$C_n = \frac{< f, X_n >_{\mathcal{L}^2}}{||X_n||_{\mathcal{L}^2}}$$

这里的无穷级数收敛指的是依 $|| - ||_{\mathcal{L}^2}$ 范数收敛:

$$||f - \sum_{n=1}^{N} C_n X_n||_{\mathcal{L}^2} \to 0, \quad N \to \infty$$

3. Hilbert 空间的对偶理论

3.1. Riesz 表示定理. 回忆实分析中的 Riesz 表示定理, 它揭示了紧支集实函数空间 $C_c(X)$[2]上的任一正连续线性泛函[3]都形如某个 σ-代数连同测度的积分形式. 这一定程度上揭示了空间 $C_c(X)$ 的对偶空间 $C_c(X)^*$, 感兴趣的读者可以参见 [**16, 3**], 我们不加证明地叙述这个定理.

定理 3.1 (Riesz 表示定理). 设 X 为 LCH 空间, u 为 $C_c(X)$ 中正的连续线性泛函. 那么存在 X 上的包含所有 Borel 集的 σ-代数 $\mathcal{M}$ 以及唯一的的正测度 μ 使得 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 称为测度空间, 使得泛函 u 具有如下形式:

$$u[f] = \int_X f \mathrm{d}\mu, \quad f \in C_c(X)$$

并且测度空间还满足以下性质:

(1) $\mu(K) < \infty$, 当 K 为 X 中紧子集;
(2) 内外正则性 (参见 [**3**]);
(3) 完备性 (参见 [**3**]).

此外, 实分析中 $\mathcal{L}^p$ 空间的共轭指标

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

可以预见 $\mathcal{L}^2$ 空间的自对偶性, 下面我们将研究一般 Hilbert 空间的对偶性质.

3.2. Hilbert 空间中的对偶.

---

[2]一般我们假设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间 (LCH 空间), 紧支集实函数空间定义为

$$C_c(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \text{函数 } f \text{ 有紧的支集 } \mathrm{supp} f\}$$

其中支集 $\mathrm{supp} f$ 定义为 $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

[3]其中正泛函 u 指的是

$$u[f] \geq 0, \quad \forall f \in C_c(X)$$

3.2.1. *Hilbert 空间的 Riesz 表示定理.*

定理 3.2 (Riesz 表示定理). 设 H 为域 $\mathbb{K}$ 上的 Hilbert 空间，u 为 H 上任一连续线性泛函，则存在唯一的元素 $y \in H$，使得

$$u(x) =< x, y >, \quad \forall x \in H$$

换言之，$u =< -, y > (: H \to \mathbb{K}) \in H^*$，并且 $||u||_{H^*} = ||y||_H$. 反过来，任一元素 $y \in H$，映射 $< -, y >$ 是一个连续线性泛函，并且 $|| < -, y > ||_{H^*} = ||y||_H$.

证明. $< -, y > \in H^*$ 由练习1.2蕴含，此外 $< -, y >= ||y||$ 是显然的. 下面证明上述定理的第一个论断.

首先，不妨 u 为非零泛函，令 $E = \ker u (\neq H)$，下面寻找要求的 $y \in H$. 断言 $y \in E^{\perp}$(合理性由 E 为闭子空间 (容易验证) 以及推论2.1保证)，事实上，若 $y \in E$，则 $u(y) =< y, y >= 0$，进而 $y = 0$ 矛盾.

再令 $(0 \neq z) \in E^{\perp}$，即 $u(z) \neq 0$，设

$$y = \lambda z, \quad \overline{\lambda} = \frac{u(z)}{||z||^2} \in \mathbb{K}$$

显然 $(0 \neq) y \in E^{\perp}$，我们断言 $u =< -, y >$. 为此任取 $x \in H$，由定理2.1对 x 关于 E 作正交分解，显然

$$x = (x - \frac{u(x)}{||y||^2} y) + \frac{u(x)}{||y||^2} y$$

其中 $(x - \frac{u(x)}{||y||^2} y) \in E$，$\frac{u(x)}{||y||^2} y \in E^{\perp}$. 因此

$$< x, y >=< \frac{u(x)}{||y||^2} y, y >= u(x)$$

除此以外，唯一性留作练习. 最后，$||u|| = || < -, y > ||$ 同样是显然的. □

练习 3.1. 验证上述证明中 E 为闭子空间，$(x - \frac{u(x)}{||y||^2} y) \in E$ 以及元素 y 是唯一的.

注 3.1. 上述定理的证明中取 λ 的共轭原因在于 y 位于 $< -, - >$ 的第二个分量，是共轭线性的，事实上，u 还可以对应唯一的 $x \in X$ 使得 $u =< x, - >$，并且满足上述定理的所有结果.

练习 3.2. 上述注记表示的结果也称为共轭版本的 Riesz 表示定理，通过取无共轭的 λ 证明之.

事实上，定理3.2刻画了如下同构 (线性等距同构)：

$$\Phi : H^* \to H, \quad u \mapsto y$$

其中 y 为定理3.2结果中的 y.

练习 3.3. 验证 Φ 是共轭线性映射，即数乘满足 $\Phi(\lambda u) = \overline{\lambda} y$, $\lambda \in \mathbb{C}$. 特别地，当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或取共轭版本的 Riesz 表示定理时，Φ 是线性的.

3.3. 伴随算子. 我们将在第8章介绍共轭算子，其蕴含如下等距嵌入

$$\mathcal{B}(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{B}(Y^*, X^*)$$

其中 X, Y 为两个 Banach 空间. 利用上述 Hilbert 空间同构的事实 $(H \cong H^*)$，我们可以简化上述等距嵌入为

$$\mathcal{B}(H, K) \hookrightarrow \mathcal{B}(K, H)$$

其中 H, K 为两个 Hilbert 空间.

定理 3.3 (伴随定理). 设 H, K 为两个 Hilbert 空间, $u \in \mathcal{B}(H, K)$, 则存在唯一的 $u^* \in \mathcal{B}(K, H)$ 使得

$$< y, u(x) >=< u^*(y), x >, \quad \forall x \in H, y \in K$$

并且 $||u^*||_{\mathcal{B}(K,H)} = ||u||_{\mathcal{B}(H,K)}$. 称 u^* 为 u 的**伴随算子**.

证明. 任取 $y \in K$，由 $u \in \mathcal{B}(H, K)$ 以及内积的连续性，

$$x \mapsto < u(x), y >, \quad x \in H$$

是 H 上的连续线性泛函，由定理3.2，存在唯一的 $z \in H$，使得

$$< x, z >=< u(x), y >$$

并且

$$||u^*|| = \sup_{y \in K,\ ||y|| \le 1} ||u^*(y)||$$

令 $u^*(y)=z$，于是

$$< u(x), y >=< x, u^*(y) >, \quad \forall x \in H, y \in K$$

不难验证上述定义的 u^* 是线性的. 最后验证 $||u^*||=||u||$:

$$\begin{aligned}
||u^*|| &= \sup_{y\in K,\ ||y||\leq 1} ||u^*(y)|| \\
&= \sup_{y\in K,\ ||y||\leq 1} \sup_{x\in H,\ ||x||\leq 1} | < x, u^*(y) > | \\
&= \sup_{x\in H,\ ||x||\leq 1} \sup_{y\in K,\ ||y||\leq 1} | < u(x), y > | \\
&= \sup_{x\in H,\ ||x||\leq 1} ||u(x)|| = ||u||
\end{aligned}$$

同时也说明 u^* 唯一. □

练习 3.4. 验证上述证明中 u^* 是线性的.

注 3.2. 事实上，在不等同 H 与 H^* 的情况下，上述等式应该记为

$$< y^*, u(x) >=< u^*(y^*), x >, \quad \forall x \in H, y^* \in K^*$$

并且 $||u^*||_{\mathcal{B}(K,H)} = ||u||_{\mathcal{B}(H^*,K^*)}$,这意味着等距嵌入 $\mathcal{B}(H,K) \hookrightarrow \mathcal{B}(K^*,H^*)$. 注意，这里的内积 $< -,- >$ 称为“形式内积”，见第7章小小节1.3.2，实际上表示

$$< -,- >: H^* \times H \to \mathbb{K},\ < -,- >: K^* \times K \to \mathbb{K}$$

与传统内积的些许区别是：形式内积 $< -,- >$ 关于第二个分量是线性的，但在定理3.3中我们还是沿用传统内积，即关于第二个分量共轭线性.

此外，不难得到

(1) 设 $u \in B(H,K)$，则 $(u^*)^* = u$.
(2) 设 H,K 为 Hilbert 空间，映射 $u \mapsto u^*$ 是从 $\mathcal{B}(H,K)$ 到 $\mathcal{B}(K,H)$ 的同构.
(3) 设 H,K,J 都是 Hilbert 空间，$u \in \mathcal{B}(H,K)$，$v \in \mathcal{B}(K,J)$，则

$$(vu)^* = u^*v^* \in \mathcal{B}(H,J)$$

由此可知，若 $u \in \mathcal{B}(H)$ 可逆，则 $u^* \in \mathcal{B}(H)$ 也可逆，并且

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

练习 3.5. 证明上述 (1)(2)(3).

定义 3.1. $u(\in \mathcal{B})(H)$ 称为**酉算子**，如果 $u^*u = uu^* = I_H$.

显然，$\mathcal{B}(H)$ 中所有的酉算子关于乘法构成一个群.

4. 完备正交系及其应用

回忆线性代数中任一有限维线性空间的结构由其基决定，一般地，在 (无限维) 赋范线性空间中可以定义 Hamel 基，见问题11，我们将在 Hilbert 空间中讨论基. 鉴于内积与正交概念，这族基有一系列良好的性质，以此进一步介绍 Hilbert 空间中的逼近问题.

4.1. 正交系的定义与例子.

4.1.1. 正交系的定义与性质.

定义 4.1. 设 I 为指标集 (允许不可数)，H 为 Hilbert 空间，$(e_i)_{i\in I}$ 为 H 中一族向量. 称 $(e_i)_{i\in I}$ **线性无关**，如果其中任意有限个向量线性无关.

(1) 称 $(e_i)_{i\in I}$ 为**正交系**，如果 $<e_i, e_j>=0,\ \forall i\neq j\in I$.

(2) 称 $(e_i)_{i\in I}$ 为**幺正系**，如果

$$<e_i, e_j>=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

(3) 称 $(e_i)_{i\in I}$ 为 H 的**完备幺正系**，如果线性包络[4]$\mathrm{span}(e_i)_{i\in I}$ 在 H 中稠密.

此外，当 $(e_i)_{i\in I}$ 为幺正系时，对任一元素 $x\in H$，称标量族 $\hat{\mathbf{x}}:=\hat{x}(i)_{i\in I}(\subset\mathbb{K})$ 为 x 关于幺正系 $(e_i)_{i\in I}$ 的 (广义)**Fourier 系数** (见定义4.3)，其中

$$\hat{x}(i):=<x, e_i>,\quad \forall i\in I$$

注 4.1. 当 I 为可数集时，我们将上述名词 "系" 该称 "序列"，例如正交系 $(e_i)_{i\in I}$ 改为正交序列 $(e_n)_{n\geq 1}$.

一个直接的观察是：

[4]称 $\mathrm{span}S$ 为子集 S 的**线性包络**，如果

$$\mathrm{span}S:=\left\{\sum_{\text{有限和}} c_n s_n : s_n\in S,\ c_n\in\mathbb{K}\right\}$$

命题 4.1. 当 I 为有限集时，记 $|I|=n$，$(e_k)_{k=1}^n$ 为幺正系. 若 $x=\sum_{k=1}^n c_k e_k$，那么

$$c_k=\hat{x}(k)=<x,e_k>,\quad \forall 1\leq k\leq n$$

并且

$$||x||^2=\sum_{k=1}^n ||c_k||^2$$

推论 4.1. 幺正系是线性无关的.

练习 4.1. 利用上一个命题证明上述推论.

4.1.2. 正交系的例子.

(1) $\mathbb{K}^n$ 中的幺正系为 $(e_k)_{k=1}^n$，其中

$$e_k=(0,\cdots,1,\cdots),\quad \forall 1\leq k\leq n$$

其中第 k 个分量取 1，其余取 0. 并且这个正交系是完备的.

(2) $l^2(\mathbb{N})=\mathbb{K}^\infty$ 中的幺正序列为 $(e_k)_{n\geq 1}$，其中

$$e_k=(0,\cdots,1,\cdots),\quad \forall k\geq 1$$

其中第 k 个分量取 1，其余取 0.

(3) 我们将在第5章中证明 Fourier 级数理论中的经典结果，即 $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 上存在完备幺正序列 $\mathbf{e}(x)$，见定义4.2.

但注意，一般幺正系不唯一. 事实上，我们可以通过 Gram-Schmidt 正交化的操作使得一列线性无关的向量成为幺正系，证明可参见 [**32**].

定理 4.1 (Gram-Schmidt 正交化). 设 H 为 Hilbert 空间，$(u_n)_{n\geq 1}$ 为 H 中线性无关的一列向量，那么存在一列规范正交序列 $(e_n)_{n\geq 1}$，使得

$$\mathrm{span}(u_n)_{n\geq 1}=\mathrm{span}(e_n)_{n\geq 1}$$

4.2. Hilbert 空间的同构.

4.2.1. *Fourier 系数最优逼近*. 首先**逼近问题**指的是：任取 Hilbert 空间中向量 x 以及有限个线性无关向量 $u_1,\cdots,u_n$，能否找到如下范数的最小值

$$||x-\sum_{k=1}^{n}c_k u_k||,\quad c_k\in\mathbb{K}$$

有限维情况下,上述最小的范数出现在当 $x-\sum c_k u_k$ 与子空间 $\mathrm{span}(u_k)_{k=1}^n$ 正交时. 通过 Gram-Schmidt 正交化向量组 $(u_k)_{k=1}^n$ 后，总可以不妨记 $(u_k)_{k=1}^n$ 为幺正系，因此往后有限个向量的情形都简记为幺正系 $(e_k)_{k=1}^n$. 我们断言的 c_k 即为定义4.1中的 Fourier 系数.

定理 4.2 (Fourier 系数最优逼近). 设 H 为 Hilbert 空间，$(e_k)_{k=1}^n$ 为其上幺正系，则对任意 $x\in H$，都有

$$||x-\sum_{k=1}^{n}\hat{x}(k)e_k||\le||x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k||$$

记 $\delta=||x-\sum_{k=1}^{n}\hat{x}(k)e_k||$ 以及 $Px=\sum_{k=1}^{n}\hat{x}(k)e_k$，我们有

$$||x||^2=\delta^2+||Px||^2$$

证明，SKETCH. 参见 [**16**]. □

推论 4.2 (Bessel 不等式). 设 H 为 Hilbert 空间，$(e_i)_{i\in I}$ 为其上幺正系，于是

$$||x||^2\ge\sum_{i\in I}||\hat{x}(i)||^2$$

关于上述推论中的求和

$$\sum_{i\in I}||\hat{x}(i)||^2$$

我们需要指明它的含义，特别是当 I 为不可数集时. 为此，设 I 为任一指标集 (可能不可数)，规定映射

$$\varphi: I\to\mathbb{K}$$

称 φ 在 I 上是**可和的**，如果存在 $\Phi\in\mathbb{K}$，使得对任意 $\epsilon>0$，存在有限子集 $J_0\subset I$，使得

$$\left|\Phi-\sum_{i\in J}\varphi(i)\right|<\epsilon,\quad\forall J_0\subset J(\text{有限})$$

并称 Φ 为 ϕ 在 I 上的**和**，记为

$$\Phi = \sum_{i\in I} \varphi(i)$$

不难验证如下性质：

(1) φ 在 I 上可和当且仅当 $|\varphi|$ 在 I 上可和；

(2)

$$\sum_{i\in I} |\varphi(i)| = \sup_{(\text{有限})J\subset I} \sum_{i\in J} |\varphi(i)|$$

(3) 若 φ 在 I 上可和，则 $(\varphi(i))_{i\in I}$ 中至多可数个元素非零. (因此我们总考虑至多可列求和.)

练习 4.2. 证明上述 (1)(2)(3).

4.2.2. *Riesz-Fischer* 定理. 推论4.2实际上告诉我们一个深刻的事实：

$$||\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}||_{l^2(I)} \le ||x - y||_H$$

其中 I 为 H 中幺正系的指标集，容易看出 $l^2(I)$ 也是一个 Hilbert 空间，见例1.3. 也就是说，倘若我们考虑映射

$$\mathcal{F} : H \to l^2(I), \quad x \mapsto \hat{\mathbf{x}}$$

上述不等式蕴含连续. 注意这里的记号 $\mathcal{F}$ 不是偶然的，事实上一定条件下就是 Fourier 变换算子，见定义4.3. 我们断言 $\mathcal{F}$ 是一个满射，如果 H 是完备的；此外，为 I 附上更多条件 (当 $(e_i)_{i\in I}$ 完备时)，可能使得 $\mathcal{F}$ 是一个等距 (进而为单射)，进而 $\mathcal{F}$ 实现 Hilbert 空间的同构：

$$H \cong l^2(I)$$

首先，我们来刻画 $\mathcal{F}$ 的满性.

定理 4.3 (Riesz-Fischer，1907). 设 H 为 Hilbert 空间，$(e_i)_{i\in I}$ 为其上幺正系. 对任意 $\varphi \in l^2(I)$，存在 $x \in H$ 使得 $\varphi = \hat{\mathbf{x}}$.

证明. 令

$$I_n := \{i \in I : |\varphi(i)| > 1/n\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

于是 $|I_n|\cdot(1/n)^2 \le ||\varphi||^2$，这说明 I_n 为有限集. 再令

$$x_n := \sum_{i\in I_n}\varphi(i)e_i, \quad n=1,2,\cdots$$

我们有 $\hat{\mathbf{x_n}} = \varphi\cdot\chi_{A_n}$，其中

$$\chi_{A_n}(i) := \begin{cases} 1, & i\in A_n \\ 0, & i\notin A_n \end{cases}$$

注意到此时

$$\hat{\mathbf{x_n}}(i) \mapsto \varphi(i) \text{ 当} n\to\infty, \quad \forall i\in I$$

并且 $|\varphi-\hat{\mathbf{x_n}}|^2 \le |\varphi|^2$. 由控制收敛定理 (参见 [**3, 16**]) 可知

$$||\varphi-\hat{\mathbf{x_n}}||_{l^2}\to 0$$

由于 I_n 为有限集，由定理4.2可知

$$||x_n-x_m||_H = ||\hat{\mathbf{x_n}}-\mathbf{x_m}||_{l^2}$$

因此 $(x_n)_{n\ge1}$ 为 Cauchy 列，由完备性，存在极限 $x=\lim x_n\in H$. 故对任意 $i\in I$，我们有

$$\hat{x}(i) =< x,e_i >= \lim < x_n,e_i >= \lim \hat{x_n}(i) = \varphi(i)$$

因此 $\hat{\mathbf{x}}=\varphi$. □

4.2.3. 完备正交系. 最后，我们再来说明何时 $\mathcal{F}$ 是一个等距.

定理 4.4. 设 H 为 Hilbert 空间，$(e_i)_{i\in I}$ 为其上幺正系. 以下说法互相等价:

(1) $(e_i)_{i\in I}$ 在 H 中是极大的，即对任意 $(0\neq)x\in H$，都使得 $\{(e_i)_{i\in I},x\}$ 为线性相关的向量组.
(2) $(e_i)_{i\in I}$ 为完备幺正系.
(3) 对任意 $x\in H$，都有

$$||x||^2 = \sum_{i\in I}|\hat{x}(i)|^2$$

(4) 对任意 $x,y\in H$，都有

$$< x,y >= \sum_{i\in I}\hat{x}(i)\overline{\hat{y}(i)}$$

注 4.2. (1) 因此我们也称完备幺正系为**极大幺正系**,参见 [**16**].

(2) (3) 称为 **Parseval 恒等式**

(3) (4) 中运算的合理性由 Hölder 不等式保证，即若 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in l^2$，则 $\hat{\mathbf{x}}\overline{\hat{\mathbf{y}}} \in l^1$. 而 (3) 是 (4) 的自然推论.

证明. 我们采用 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2). 若不然，由推论2.1可知存在 $(0 \neq) y \in \operatorname{span}(e_i)_{i\in I}^{\perp}$，使得 $\{(e_i)_{i\in I}, y\}$ 线性无关，与条件矛盾.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 对任意 $x \in H, \epsilon > 0$，由 $\operatorname{span}(e_i)_{i\in I}$ 稠密以及定理4.2可知存在 $z \in \operatorname{span}(e_i)_{i\in I}$ 使得

$$||x - z|| < \epsilon$$

其中

$$z = \sum_{i_k，\text{有限和}} \hat{x}(i_k) e_{e_k}$$

因此

$$\begin{aligned}(||x|| - \epsilon)^2 &\leq ||z||^2 \\ &= \sum_{i_k，\text{有限和}} \hat{x}(i_k) e_{e_k} \\ &\leq \sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2 = ||\hat{\mathbf{x}}||_{l^2}\end{aligned}$$

最后令 $\epsilon \to 0$ 以及推论4.2可知

$$||x||^2 = \sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2$$

(3) $\Longrightarrow$ (4). 注意到 (3) 等价于 $< x, x > = < \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} >$, 对任意 $\lambda \in \mathbb{K}$, 有

$$< x + \lambda y, x + \lambda y > = < \hat{\mathbf{x}} + \lambda \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}} + \lambda \hat{\mathbf{y}} >$$

于是

$$\overline{\lambda} < x, y > + \lambda < y, x > = \overline{\lambda} < \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} > + \lambda < \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}} >$$

分别取 $\lambda = 1, i$，可得

$$< x, y > = < \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} >$$

(4) $\Longrightarrow$ (1). 若不然，存在 $(0 \neq) z \in H$ 使得 $< z, e_i >= 0$, $\forall i \in I$，令 $x = y = z$，进而

$$< x, y >= ||z||^2 \neq 0$$

这与 $< z, e_i >= 0$ 矛盾. $\square$

4.2.4. 可分与不可分 *Hilbert* 空间. 因此,对于有完备幺正系的 Hilbert 空间，我们建立了如下同构：

$$H \to l^2(I), \quad x \mapsto \hat{\mathbf{x}}$$

其中 I 为完备幺正系的指标集.

根据 $\mathcal{L}^p$ 空间理论，$l^2(I)$ 空间的同构仅依赖于指标集 I 的**基数** (参见 [**3**]). 因此我们将判别具有完备正交系的 Hilbert 空间之间的同构问题转化为判别其中完备正交系的指标集的基数！一个诱人的问题是: 是否所有 Hilbert 空间都有完备的正交系? 一旦解决这个问题, 那么 Hilbert 空间具有类似线性代数中有限维线性空间的“简单”结构，即“维数决定同构”.

一个最简单的观察是：有限维 Hilbert 空间同构当且仅当维数一致. 这个论断可以直接作为定理1.2的推论，但同时被如下同构

$$H \to l^2(I), \quad |I| = \dim H < \infty$$

蕴含. 更进一步地，若 Hilbert 空间有可数的稠密子集，只需要对其施以 Gram-Schmidt 正交化可以得到完备正交系，参见 [**32**]，这个证明方式被称为**构造性证明**, 即完备正交系是可构造的. 另外, 该构造方式是逐个归纳的，因此正交系中向量的个数可数. 因此，可分的 Hilbert 空间一定存在 (可数) 完备正交系. 所幸我们遇到的大部分 Hilbert 空间都是可分的，例如 $l_n^2, l^2(\mathbb{N})$.

事实上，也存在不可分的 Hilbert 空间，下面给出构造. 设 I 为指标集 (不一定可数)，定义

$$l^2(I) = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} : ||\mathbf{x}||_{l^2} < \infty\}$$

其中

$$||\mathbf{x}|| := \sup_{(\text{有限}) J \subset I} \left(\sum_{i \in J} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

不难验证 $l^2(I)$ 为 Banach 空间. 在可和的意义下，定义其上内积为

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>:=\sum_{i\in I}<x_i,y_i>,\quad \forall\mathbf{x}=(x_i)_{i\in I},\mathbf{y}=(y_i)_{i\in I}$$

可以验证上述范数由该内积诱导，因此 $l^2(I)$ 在该内积下成为 Hilbert 空间. 我们取 $l^2(I)$ 中特殊的元素 e_i，使得仅在第 i 位取 1，剩余全取 0，得到一族元素 $(e_i)_{i\in I}$，正好成为 $l^2(I)$ 的完备正交系. 此时，当 I 不可数时 $(e_i)_{i\in I}$ 中元素个数也不可数，进而 $l^(I)$ 不可分.

练习 4.3. (1) 验证上述构造的范数 $||-||$ 被上述内积 $<-,->$ 诱导.

(2) 验证 $(e_i)_{i\in I}$ 为完备正交系.

最后，对于不可分的 Hilbert 空间，我们可以通过 Zorn 引理说明完备正交系的存在性.

定理 4.5 (完备正交系的存在性). 任一 Hilbert 空间存在完备幺正系.

证明. 设 $\mathcal{O}$ 为 Hilbert 空间 H 中全体非空幺正系构成的集族. 定义其上偏序关系为包含关系 $\subset$. 设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{O}$ 中任一全序子集族，显然

$$\bigcup_{S\subset\mathcal{S}}S$$

为上界. 由 Zorn 引理可知该偏序集存在极大元 M. 断言 M 为完备幺正系. 若不然，由推论2.1，存在 $y\in H$ 使得 $y\in\mathrm{span}M^{\perp}$，再由定理4.4的 (1) 推出矛盾. □

4.3. Hilbert 空间中的逼近问题. 我们在问题13与引理2.1中研究了一般赋范空间中的凸集的逼近，并且定理2.1中刻画了闭子空间投影的最佳逼近. 逼近理论在古典分析中就有不少例子，例如 Fourier 级数在连续函数空间中的最佳逼近性，参见 [**20**]，以及第5章中研究连续函数空间甚至一般可积函数空间中的稠密子空间. 我们将在本节中利用 Hilbert 空间完备正交系的存在性 (给出非构造性与构造性的证明) 研究 Fourier 级数与三角多项式在 $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 空间 (见定义4.2) 中的应用.

4.3.1. 一维 *Fourier* 分析. 下面仅考虑 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的函数, [**20**] 中将其称为圆周 S^1 上的函数, 因此只在区间 $[-\pi,\pi]$ 上考虑, 并设 $[-\pi,\pi]$ 上的测度为规范化后的 Lebesgue 测度, 记为 $\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$. 首先需要明确几个函数空间和序列空间的定义.

定义 4.2. 以下定义一维 Fourier 分析中的常用函数空间:

(1) 设测度空间 $([-\pi,\pi],\mathcal{L},\frac{\mathrm{d}x}{2\pi})$, 其中 $\mathcal{L}$ 为区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Lebesgue σ-代数, 取其上的 $\mathcal{L}^p$ 空间, 记为 $\mathcal{L}^p_{2\pi}$, 其中 $0<p\le\infty$. 定义当 $1\le p<\infty$ 时的 $\mathcal{L}^p$ 范数为

$$||f||_{\mathcal{L}^p_{2\pi}} := \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\right)^{1/p}$$

当 $p=\infty$ 时, 对应的 $\mathcal{L}^\infty$ 范数就是通常定义的 $\mathcal{L}^\infty$ 范数. 注意, $\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的概率测度. 并且由 Hölder 不等式可知

$$\mathcal{L}^q_{2\pi}\subset\mathcal{L}^p_{2\pi},\quad ||f||_{\mathcal{L}^p_{2\pi}}\le||f||_{\mathcal{L}^q_{2\pi}}$$

其中 $1\le p<q\le\infty$

(2) $C_{2\pi}$ 表示区间 $[-\pi,\pi]$ 上以 2π 为周期的连续函数构成的空间, 可知 $C_{2\pi}\subset C([-\pi,\pi])$. 取其上的范数为通常的一致范数 $||-||_\infty$, 即

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$$

(3) $\mathcal{P}(\Omega)$ 表示欧式空间 $\mathbb{K}^n$ 中开区域 Ω 上全体 $\mathbb{K}$ 系数多项式构成的空间, 可知 $\mathcal{P}(\Omega)\subset C(\Omega,\mathbb{K})$. 特别地, 我们用 $\mathcal{P}$ 表示闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上全体复系数多项式构成的空间.

(4) $\mathcal{T}$ 表示闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上全体三角多项式构成的空间, 可知 $\mathcal{T}\subset C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, 并且 $\mathcal{T}$ 中任一元素 T 可以表示为

$$T(x)=\sum_{k=m}^{n}c_ke^{ikx},\quad c_k\in\mathbb{C},\ m<n\in\mathbb{Z}$$

定义一维 Fourier 分析中的常用序列空间:

(1) $c_0(\mathbb{Z})$ 表示在无穷远处消失的复数序列空间, 即

$$c_0(\mathbb{Z}) := \{\mathbf{c}=(c_\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}:\lim_{|n|\to\infty}\}c_n=0$$

规定其上范数为极大范数，即 $||\mathbf{c}||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|$. 特别地，可取 $c_0(\mathbb{N})$.

(2) $\mathbf{e}(x) := (e_n(x))_{n\in\mathbb{Z}} = (e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$，称为三角基.

注 4.3. 显然 $\mathcal{T}$ 为 $C_{2\pi}$ 和 $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ 的向量子空间.

此外，定义一维 Fourier 分析中几个基本概念，关于一般空间上的 Fourier 分析可见第10章..

定义 4.3. (1) 定义 $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ 上的 **Fourier 变换算子** $\mathcal{F}$，即

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{i\xi x}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1_{2\pi},\ \xi \in \mathbb{R}$$

特别地，当 $\xi = n \in \mathbb{Z}$，记为

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

称为 f 的第 n 个 (狭义)**Fourier 系数**，并且将 f 的所有 Fourier 系数构成的序列记为

$$\mathcal{F}[f] = \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

(2) 定义 (1) 中的序列 $\mathcal{F}[f]$ 连同三角基 $\mathbf{e}(x)$(见定义4.2中序列空间的 (2)) 为 $C_{2\pi}$ 上函数 f 的 **Fourier 级数**或称 Fourier 展开，即

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$$

并且称

$$S_N(f)(x) := \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)e^{inx}$$

为 Fourier 级数的部分和.

(3) 称

$$D_N(x) := \sum_{|n|\le N} e^{inx} = \frac{\sin(N+1/2)x}{\sin(1/2)x}$$

为 **Dirichlet 核**.

注 4.4. (1) 有些文献将 Fourier 变换算子定义为

$$\mathcal{F}[f] := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x$$

例如 [**20**].

(2) 事实上，广义的 Fourier 变换算子定义在一般 $\mathcal{L}^2$ 空间甚至广义函数空间上，见第10章，或参见 [**35, 6, 17**].

(3) 回忆闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积函数的“规范化”**卷积**为

$$f*g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cdot g(x-y)\frac{\mathrm{d}y}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cdot g(y)\frac{\mathrm{d}y}{2\pi} = g*f(x), \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

不难验证

$$S_N f(x) = D_N * f(x)$$

4.3.2. $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 的完备正交系. 首先，$\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 空间中的内积定义为

$$< f, g >:= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

不难验证范数 $||-||_{\mathcal{L}^2_{2\pi}}$ 由其诱导且三角基 $\mathbf{e}(x)$ 在该内积下是幺正系. 我们断言三角基还是完备幺正系，即

$$\mathcal{L}^2_{2\pi} = \mathrm{span}(e_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$$

为此需要说明任一 $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 中的函数都可以被三角多项式逼近. 由实分析的知识 ($\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 的可分性，见问题5) 可知 $C_{2\pi}$ 在其中稠密. 因此只要证明 $\mathcal{T}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密即可，事实上，我们将在第5章中应用 Stone-Weierstrass 定理 (定理2.2) 给一个证明. 而在本章中，可以利用好核与恒等元逼近的技术来证明这个结果，参见 [**20, 19, 16**].

定理 4.6 (Weierstrass 第二逼近定理). 对任意以 2π 为周期的连续函数 f，存在三角多项式逼近. 换言之，对任意 $\epsilon > 0$，存在三角多项式 $T \in \mathcal{T}$ 使得

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

至此，我们在上一小节中建立的同构

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2_{2\pi} \to l^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto \mathcal{F}[f]$$

其像有了具象的表示，即函数的 Fourier 展开. 在这个例子中，可以将定理4.3以及定理4.4的 (3) 用一维 Fourier 分析的语言重新叙述，参见 [**20**]，即

- (Riesz-Fischer 定理) 对任意序列 $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$，存在函数 $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$ 使得 (c_n) 为其 Fourier 展开的系数，即

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

- (Parseval 恒等式)

$$||f||^2_{\mathcal{L}^2_{2\pi}} = ||\mathcal{F}[f]||^2_{l^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}|^2$$

习题三

¶ 内积空间的若干性质.

问题 18. 设 A 为 l^2 空间的子集,其元素 $x=(x_n)$ 满足 $|x_n|\le 1/n$,证明 A 是紧集.

问题 19. 设 H 为内积空间, $x_n, x\in H$. 并假设

$$\lim_n ||x_n|| = x, \quad \lim_n < y, x_n > = < y, x >,\ \forall y\in H$$

证明 $\lim_n ||x_n - x|| = 0$.

问题 20. 设 (x_n) 是 Hilbert 空间 H 中的有界序列. 证明存在 (x_n) 的子序列 (x_{n_k}), 使得对任意 $y\in H$ 有

$$\lim_n < y, x_{n_k} > = < y, x >$$

问题 21. 设 H 是内积空间. $(x_1,\cdots,x_n)$ 是 H 中的任一向量场, 称矩阵 $(< x_i, x_j >)_{ij}$ 的行列式为向量族 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的 Gram 行列式, 记作 $G(x_1,\cdots,x_n)$.

(1) 证明 $G(x_1,\cdots,x_n)\ge 0$; 且 $G(x_1,\cdots,x_n)>0$ 当且仅当向量值 $(x_1,\cdots,x_n)$ 线性无关.

(2) 假设向量族 $(x_1,\cdots,x_n)$ 线性无关. 令 $E=\operatorname{span}(x_1,\cdots,x_n)$. 证明:

$$d(x,E)^2 = \frac{G(x,x_1,\cdots,x_n)}{(x_1,\cdots,x_n)}$$

问题 22. 设 H 为一个 Hilbert 空间, 并设 $T\in\mathcal{B}(H)$ 且 $||T||\le 1$, 证明:

(1) $T(x)=x$ 当且仅当 $T^*(x)=x, \quad x\in H$;

(2) $\ker(\mathrm{id}-T)=\ker(\mathrm{id}-T^*)$;

(3) $H=\ker(\mathrm{id}-T)\oplus\overline{(\mathrm{id}-T)(H)}$

¶ 内积范数的存在性.

问题 23. 本习题希望说明 $\mathcal{L}^p$ 空间不可内积化, 其中 $p\ne 2$.

(1) 设 H 为 Hilbert 空间，$D_n := \{-1,1\}^n$，证明：

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\epsilon_k)\in D_n}||\epsilon_1 x_1+\cdots+\epsilon_n x_n||^2 = ||x_1||^2+\cdots x+||x_n||^2, \quad x_1,\cdots,x_n\in H$$

(2) 设 $(E,||-||)$ 为 Banach 空间，并假设有一个 E 上的内积范数 $|-|$ 等价于 $||-||$. 证明存在正常数 a,b，使得

$$a\sum_{k=1}^n||x_k||^2 \leq \sum_{(\epsilon_k)\in D_n}\left|\left|\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k\right|\right|^2 \leq b\sum_{k=1}^n||x_k||^2, \quad x_1,\cdots,x_n\in H$$

(3) $1\leq p\neq 2\leq\infty$，证明 $l^p,\mathcal{L}^p$ 没有等价的内积范数.

CHAPTER 4

拓扑向量空间与局部凸空间

旨趣. 回忆前三章中研究的空间，其上都有确切的度量结构，这至少使得分析中的 $\epsilon-\delta$ 语言有操作性，本章中将研究最一般的空间——拓扑向量空间 (TVS). 事实上分析与几何中许多空间并不是赋范空间，甚至不存在自然产生的度量，例如 (实) 可微函数空间 C^m、开区域上全纯函数构成的空间 $\mathcal{H}$ 以及 Schwartz 函数空间等等. 研究这里空间最底层的方法是直接操作拓扑，进一步是了解清楚邻域基的情况，因此我们在第1.1、1.2小节中刻画了 TVS 中的凸集和平衡集以及具有二者性质的邻域，注意这两个概念在第7、8中进一步刻画 w-与 w^*-紧性. 在第2节中我们将试图为一般的 TVS 赋予“度量”，其中半范数族诱导的拓扑有极具度量的性质 (命题3.1可用于判别是否可度量化)，即连续性的刻画 (见2.2) 和局部凸性；反过来我们又能证明局部凸的空间的原始拓扑与一族半范数 (Minkowski 泛函) 诱导的拓扑等价，这个事实作为第7章第3节定义弱拓扑与弱 * 拓扑的前置.

1. 拓扑向量空间中的基本概念

1.1. 拓扑向量空间的定义与性质.

定义 1.1. 设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，τ 为 X 上的拓扑. 称 X 是一个**拓扑向量空间**[1](简称 TVS)，如果映射

$$\Phi : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y \tag{16}$$

$$\Psi : \mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \tag{17}$$

在拓扑 τ 下连续[2]，此时称 X 的线性结构与拓扑结构兼容.

命题 1.1. 设 X 是一个 TVS，则**伸缩平移算子**

$$T_{a,\lambda} : X \to X, \quad x \mapsto \lambda x + a$$

是一个同胚，当 $\lambda \neq 0$ 时.

证明. 注意到 $T_{a,\lambda} = \Phi(-, a) \circ \Psi(\lambda, -)$，因此 $T_{a,\lambda}$ 连续. 此外，当 $\lambda \neq 0$ 时，逆映射 $T_{a,\lambda}^{-1} = \Psi(1/\lambda, -) \circ \Phi(-, -a)$ 也连续. □

定义 1.2. 设 X 是一个 TVS，$A \subset X$，

(1) 称 A 是**平衡集**，如果 $\lambda A \subset A$，这里 $\lambda A := \{\lambda x : \forall x \in A\}$，其中 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ 且 $|\lambda| \leq 1$.

(2) 称 A 是**吸收集**，如果对任意 $x \in X$，存在 $(0 \neq)\lambda \in \mathbb{K}$，使得 $x/\lambda \in A$.

注 1.1. (1) 不难验证: 若 A 是平衡集, 则 $0 \in A$ 且 $-A = A$; 特别地，当 $X = \mathbb{C}$，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时，平衡集一定形如圆心为原点 O 的圆盘.

(2) 存在不是平衡集的吸收集：例如在 $\mathbb{C}$ 中，令 $A = S^1 \cup \{O\}$，其中 $S^1 := \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$.

(3) 存在不是吸收集的平衡集：例如在 $\mathbb{C}$ 中，令 $A = \{re^{i\theta} : 0 \leq r < 1,\ \theta \in [-\pi/4, \pi.4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]\}$.

命题 1.2. 设 X 是一个 TVS，$A \subset X$，则有

(1) 设 A 向量子空间 (凸集或平衡集)，则 $\mathrm{Int}(A)$ 亦然.

---

[1]本章中均设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，若进一步 X 是拓扑向量空间，则记拓扑为 τ.

[2]此时 $X \times X, \mathbb{K} \times X$ 取乘积拓扑.

(2) 设 A 为凸集，则 $\overline{A}$ 亦然；当 A 为平衡集且 $O \in \mathrm{Int}(A)$，则 $\mathrm{Int}(A)$ 也为平衡集.

证明. (1) 设 A 向量子空间, 要证明 $\mathrm{Int}(A)$ 为向量子空间, 即说明如下映射

$$\varphi : A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto \lambda x + \mu y, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

满足 $\varphi(\overline{A} \times \overline{A}) \subset \overline{A}$. 注意到

$$\varphi(\overline{A} \times \overline{A}) \subset \varphi(\overline{A \times A}) \subset \overline{\varphi(A \times A)} \subset \overline{A}$$

其中第二个包含号来自于 φ 的连续性. 要证明凸集和平衡集, 可取 $\lambda + \mu = 1$ 和 $A \to A$ 满足 $x \mapsto \lambda x$ 的特殊情况即可.

(2) 设 A 为凸集，即证 $\lambda\mathrm{Int}(A) + (1-\lambda)\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(A)$ 即可. 注意到事实：

(18) 当 U, V 其一为开集时，$U + V$ 为开集.

显然 $\lambda\mathrm{Int}(A)$ 为开集，于是 $\lambda\mathrm{Int}(A) + (1-\lambda)\mathrm{Int}(A)$ 为开集，进而由于 A 的凸性，我们有

$$\lambda\mathrm{Int}(A) + (1-\lambda)\mathrm{Int}(A) \subset \lambda A + (1-\lambda)A \subset A$$

而 $\mathrm{Int}(A)$ 为 A 中最大的开集, 因此 $\lambda\mathrm{Int}(A)+(1-\lambda)\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(A)$.

此外，设 A 为平衡集且 $O \in \mathrm{Int}(A)$. 令 $|\lambda| \leq 1$，于是

$$\lambda\mathrm{Int}(A) \subset \lambda A \subset A$$

其中第二个包含号来自于 A 是平衡集. 若 $\lambda \neq 0$，由 $\lambda\mathrm{Int}(A)$ 为开集可知 $\lambda\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(A)$；当 $\lambda = 0$ 显然成立.

□

练习 1.1. 证明以上证明中的论断 (18).

1.2. 拓扑向量空间中的邻域基.

命题 1.3. 设 X 是一个 TVS，$\mathcal{N}(x)$ 为 $x(\in X)$ 的邻域系，那么

(1) 任意 $x \in X$，$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(O) + x$；$V \in \mathcal{N}(O)$ 当且仅当 $\lambda V \in \mathcal{N}(O)$，$\forall (0 \neq) \lambda \in \mathbb{K}$.

(2) 任意 $V \in \mathcal{N}(O)$，存在 $U \in \mathcal{N}(O)$，使得

$$U + U \subset V$$

(3) 原点 O 的任一邻域都是吸收集.

(4) 原点 O 有平衡的开 (闭) 邻域基.

证明. (1) 利用伸缩平移算子的同胚性容易验证.

(2) 任意 $V \in \mathcal{N}(O)$，利用 Φ 的连续性，存在 $W \in \mathcal{N}((O, O))$，使得 $\Phi(W) \subset V$. 由乘积拓扑的性质，存在 $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(O)$，使得 $U_1 \times U_2 \subset W$. 取 $U = U_1 \cap U_2$，于是 $U \in \mathcal{N}(O)$ 且 $U \times U \subset W$. 因此

$$U + U = \Phi(U \times U) \subset \Phi(W) \subset V$$

(3) 任意 $V \in \mathcal{N}(O)$，任取 $x \in X$，定义

$$\Psi_x : \mathbb{K} \to X, \quad \lambda \mapsto \lambda x$$

显然连续且 $\Psi_x(0) = 0$. 进而存在 $\lambda \in \mathbb{K}$ 满足 $|\lambda| > 0$ 使得

$$\Psi_x(B_{\mathbb{K}}(0, |\lambda|)) \subset V$$

其中 $B_{\mathbb{K}}(0, |\lambda|) := \{k \in \mathbb{K} : |k| < |\lambda|\}$，即 $\lambda x \in V$.

(4) 首先证明存在开的平衡邻域基. 我们断言：对任意 $V \in \mathcal{N}(O)$，存在平衡集 $U \in \mathcal{N}(O)$，使得

$$U \subset V$$

事实上，于 (3) 的证明类似，有

$$\Psi(B_{\mathbb{K}}(0, |\delta|) \times V') \subset V$$

其中 $\delta \in \mathbb{K}$ 满足 $|\delta| > 0$ 且 $V' \in \mathcal{N}(O)$. 即 $\lambda V' \in V$ 其中 $|\lambda| \le |\delta|$. 令

$$U := \bigcup_{|\lambda|<|\delta|} \lambda V'$$

显然为开集，且 $U \subset V$. 取 $\mu \in \mathbb{K}$ 满足 $|\mu| \le 1$，于是

$$\mu U = \bigcup_{|\lambda|<|\delta|} \mu\lambda V' \subset \bigcup_{|\lambda|<|\delta|} \lambda V' = U$$

即 U 为平衡集. 取 $\mathrm{Int}(U)$，由命题1.2的 (1) 可知 $\mathrm{Int}(U)$ 为满足条件的开邻域.

再证存在闭的平衡邻域基. 即证：对任意 $V \in \mathcal{N}(O)$，存在平衡闭邻域 $W \in \mathcal{N}(O)$，使得

$$W \subset V$$

事实上，(2) 与上述开邻域的讨论，蕴含存在平衡邻域 $U \in \mathcal{N}(O)$，使得

$$U + U \subset V$$

而命题1.2的 (2) 说明 $\overline{U}$ 为平衡闭邻域，为此取 $W = \overline{U}$，只要说明 $\overline{U} \subset V$ 即可. 对任意 $x \in \overline{U}$，(1) 蕴含 $x + U \in \mathcal{N}(x)$. 不难看出，存在 $y \in U$ 使得 $y \in x + U$，即存在 $z \in U$ 使得 $y = x + z$，进而

$$x = y - z = y + (-z) \subset U + U \subset V$$

进而 $x \in V$，即 $W \subset V$.

$\square$

赋范空间中我们知道线性算子的连续性等价于有界性，回忆命题2.1，对于拓扑向量空间我们仍然有类似的性质.

命题 1.4. 设 X, Y 为 TVS，$u : X \to Y$ 为线性映射，则以下说法互相等价：

(1) u 连续；

(2) u 在原点 O 处连续；

若 Y 为赋范空间，则以上两条等价于

u 在原点 O 的某个邻域内有界.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2) 是显然的，而 (2) $\Longrightarrow$ (1) 由命题1.3的 (1) 与 u 的线性性蕴含. 下证 (2) $\Longrightarrow$ (3)，为此对任意 Y 中邻域 $V \in \mathcal{N}_Y(O)$，存在 X 中邻域 $W \in \mathcal{N}_X(O)$ 使得

$$u(W) \subset V$$

即

$$||u(x)|| \leq \sup_{y \in V} ||y||, \quad \forall x \in W$$

再证 (3) $\Longrightarrow$ (2)，设 u 再 $V(\in \mathcal{N}(O))$ 内有界，即存在 $C > 0$ 使得

$$\sup_{x \in V} ||u(x)|| \leq C$$

进而对任意 $\epsilon > 0$，令 $U = \frac{\epsilon}{C} V$，我们有

$$||u(x)|| < \epsilon, \quad \forall x \in U$$

□

进而可以定义拓扑向量空间的对偶.

定义 1.3. 设 X, Y 为 TVS,令 $\mathcal{B}(X,Y) := \{u : X \to Y | u\text{为连续线性映射}\}$. 特别地，记为 $\mathcal{B}(X)$，如果 $Y = X$；记为 X^* 如果 $Y = \mathbb{K}$，称为 X 的**对偶空间**.

2. 半范数空间与局部凸空间

2.1. 半赋范空间.

2.1.1. 半范数拓扑的构造. 回忆**半范数**的定义，见定义1.1. 以此可以定义**半距离**

$$d_p(x,y) := p(x-y), \quad \forall x, y \in X$$

它显然满足：

(1) $d_p(x,y) \geq 0$ 且 $d_p(x,x) = 0$；
(2) $d_p(x,y) = d_p(y,x)$；
(3) $d_p(x,z) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z)$.

进而定义半距离下的开球

$$B_p(x,r) := \{y \in X : d_p(x,y) < r\}, \quad x \in X, r > 0$$

称 $B_p(x,r)$ 为球心 x 半径 r 的**开 p-球**. 与度量拓扑类似，上述开 p-球诱导 X 上的拓扑 τ_p，即其中的开集为若干开 p-球之并. 一个观察是：τ_p 是 Hausdorff 的当且仅当 p 是一个范数，我们留给读者验证. 下面我们希望通过一族半范数出发构造 Hausdorff 拓扑. 鉴于构造手段的技术性，我们需要如下术语：

定义 2.1. 称半范数族 $(p_i)_{i\in I}$，其中 I 为指标集，是**定向的**，如果对任意 $i, j \in I$，存在 $k \in I$ 使得

$$p_k \geq \max\{p_i, p_j\}$$

否则称**不定向的**.

事实上，我们总可以通过“扩充”操作使得半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 定向，为此，取任一有限子集 $J \subset I$，令

$$q_J := \max_{i\in J} p_i$$

显然 q_J 为半范数. 扩充得到的新的半范数族 $(p_i)_{i\in I'} := (p_i)_{i\in I} \cup (q_J)$ 是定向的. 我们依靠半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 构造拓扑的方式为：取定**开集**为

$$O := \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha)$$

其中 Γ 为指标集，$J_\alpha(\subset I)$ 为有限子集，并且 $x_\alpha\in X, r_\alpha>0$. 记此开集诱导的拓扑为 τ'[3]. 倘若 $(p_i)_{i\in I}$ 可定向，只需要取开集为

$$O:=\bigcup_{i\in I'}B_{p_i}(x_i,r_i)$$

其中 $I'(\subset I)$ 为有限子集，并且 $x_i\in X, r_i>0$，不难验证如此构造的拓扑与上述拓扑 τ' 是一致的.

下面我们说明 τ' 确实是一个拓扑. 显然 $\emptyset, X\in\tau'$，以及任意并在其中封闭，因此只要验证两个开集的交仍是开集. 又注意到任意两个开集

$$A=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha,r_\alpha),\quad B=\bigcup_{\beta\in\Lambda}B_{q_{J_\beta}}(x_\beta,r_\beta)$$

之并为

$$A\cup B=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\bigcup_{\beta\in\Lambda}\Big(B_{q_{J_\alpha}}(x_\alpha,r_\alpha)\cap B_{q_{J_\beta}}(x_\beta,r_\beta)\Big)$$

因此只要说明两个开 p_J-球之交是开集. 为此不妨取两个开球为 B_1,B_2，其中

$$B_1=B_{q_{J_1}}(x_1,r_1),\quad B_2=B_{q_{J_2}}(x_2,r_2)$$

其中 $J_1,J_2(\subset I)$ 为有限子集. 不妨交集非空，任取 $x\in B_1\cap B_2$，令

$$r=\min\{r_1-d_{q_{J_1}}(x-x_1),r_2-d_{q_{J_2}}(x-x_2)\}(>0)$$

再令 $J=J_1\cup J_2$，$q_{J_1},q_{J_2}\le q_J$. 现考虑开球 $B:=B_{q_J}(x,r)$. 断言 $B\subset B_1\cap B_2$，为此任取 $y\in B$，于是

$$\begin{aligned}d_{q_{J_1}}(y-x_1)&\le d_{q_{J_1}}(y,x)+d_{q_{J_1}}(x,x_1)\\&\le d_{q_J}(y,x)+d_{q_{J_1}}(x,x_1)\\&<(r_1-d_{q_{J_1}}(x,x_1))+d_{q_{J_1}}(x,x_1)=r_1\end{aligned}$$

这说明 $y\in B_1$，同理 $y\in B_2$，因此 $B\subset B_1\cap B_2$.

[3]本章中为与 TVS 原始的拓扑 τ 区分，不加说明情况下默认一般半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 诱导的拓扑为 τ'.

2.1.2. *半范数拓扑的性质*. 上文中我们已经知道，仅单个半范数诱导的拓扑一定不是 Hausdorff 的，但一族半范数诱导的拓扑 τ' 具备成为 Hausdorff 拓扑的可能性：注意到 τ' 是 Hausdorff 的当且仅当半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 是**可分点的**，即对任意 $(0\neq)x\in X$，存在 p_i 使得 $p_i(x)\neq 0$，或等价地，若 $\sup_{i\in I} p_i(x)=0$ 则 $x=0$.

此外，上一节中我们介绍过拓扑结构与线性结构的相容性，期望半范数族诱导的拓扑能够使得 X 成为拓扑向量空间.

命题 2.1. 设 $(p_i)_{i\in I}$ 为 X 上的一族半范数，那么由 $(p_i)_{i\in I}$ 诱导的拓扑 τ' 与 X 的线性结构相容，并且拓扑 τ' 是使得每个 p_i 连续的最弱拓扑.

证明. 与线性结构相容只要说明定义1.1中的映射 (16) 和 (17) 在 τ' 下连续，为此利用半范数的三角不等式与正齐次性可以说明，留作习题. 下面我们来说明 τ' 是使得每个 p_i 连续的最弱拓扑. 首先说明 p_i 连续. 为此任取 $x_0\in X$, $\epsilon>0$，当 $x\in B_{p_i}(x_0,\epsilon)$ 时有

$$|p_i(x)-p_i(x_0)|\leq p_i(x-x_0)<\epsilon$$

因此 p_i 在 x_0 处连续.

最后说明 τ' 是最弱拓扑. 为此设 τ 为 X 上使得所有 p_i 连续的拓扑，下证 $\tau'\subset\tau$. 不难验证 τ 与线性结构相容 (见证明后的练习)，故只要验证 $\mathcal{N}_{\tau'}(O)\subset\mathcal{N}_{\tau}(O)$. 任取 $V\in\mathcal{N}_{\tau'}(O)$，存在有限子集 $J(\subset I)$ 使得

$$\bigcap_{i\in J} B_{p_i}(0,\epsilon)=B_{p_J}(0,\epsilon)\subset V$$

而 $B_{p_i}(0,\epsilon)=p^{-1}((-\epsilon,\epsilon))$. 又由于 p_i 在 τ 下连续，故 $B_{p_i}(0,\epsilon)$ 为 τ 中开集，因此 $\bigcap_{i\in J} B_{p_i}(0,\epsilon)$ 也为 τ 中开集，从而 $V\in\mathcal{N}_{\tau'}(O)$. □

练习 2.1. 证明定义1.1中的映射 (16) 和 (17) 在 τ' 下连续.

上述论证中使用了乘积拓扑的性质，我们将半范数拓扑的乘积拓扑性质的验证留给读者：

练习 2.2. (1) 设 $(X,(p_i)_{i\in I})$ 与 $(Y,(q_j)_{j\in J})$ 为两个集合与其上半范数族，分别诱导拓扑 τ_1,τ_2. 令 $K=I\times J$ 以及 $k=(i,j)\in K$，规定

$$r_k(x,y):=\max_{i,j}\{p_i(x),q_j(y)\},\quad \forall(x,y)\in X\times Y$$

于是 $(r_k)_{k\in K}$ 为直积 $X\times Y$ 上的一族半范数，且其诱导的拓扑 τ' 与 τ_1,τ_2 的乘积拓扑一致.

(2) τ' 是 Hausdorff 的当且仅当 τ_1,τ_2 是 Hausdorff 的.

定义 2.2. 设 X 为向量空间，$(p_i)_{i\in I}$ 为一族半范数，称 X 为**半赋范空间**，记为 $(X,(p_i)_{i\in I})$. 称拓扑向量空间是**半赋范的**，如果其拓扑可由一族半范数诱导.

定义 2.3. 称拓扑向量空间是**局部凸空间** (简称 LC)，如果原点 O 存在凸的邻域基.

显然线性结构结合命题1.3的 (1) 蕴含每点有凸的邻域基.

上述讨论告诉我们：半赋范空间是拓扑向量空间. 一个自然的问题是：任一拓扑向量空间是否是半赋范空间？即任一拓扑向量空间的拓扑是否可由一族半范数诱导？本章最终的目的是说明半赋范空间与局部凸空间等价，见定理2.1和定理2.2，因此上述问题归结为任一局部凸空间是否是拓扑向量空间. 答案是否定的，事实上，实分析中 $\mathcal{L}^p$ 空间中单位球的凹凸性 (事实上等价于 Minkowski 不等式) 暗示我们：$\mathcal{L}^p$ 空间当 $0<p<1$ 时不应该是局部凸的. 见问题24.

根据半范数拓扑 τ' 的构造以及半范数开球的凸性可知：

定理 2.1. 半赋范空间是局部凸空间.

注 2.1. 我们需要澄清的是：向量空间 X 装备一族半范数 $(p_i)_{i\in I}$ 诱导的拓扑 τ'(特别地，一个半范数 p 诱导的拓扑)，其中以原点为球心的开球的凸性与 (一族) 半范数的三角不等式等价. 留给读者验证.

回忆赋范空间 X 中范数强弱的概念 (见定义1.4)，即范数 p 强于 q，如果存在常数 $C>0$ 使得

$$q(x)\le Cp(x)$$

进而存在强范数空间 (X,p) 到弱范数空间 (X,q) 自然的连续线性映射 $u:(X,p)\to(X,q)$，它表现为

$$q(u(x)) \le C'p(x), \quad \forall x\in X$$

其中 C' 为常数. 事实上，两个半赋范空间间的连续线性映射有类似范数的处理方式，特别地，只有一个半范数的空间.

命题 2.2. 设 $(X,(p_i)_{i\in I}),(Y,(q_j)_{j\in J})$ 为两个半赋范空间，$u:X\to Y$ 为线性映射. 那么 u 是连续的当且仅当对任意 J 的有限子集 J', 存在 I 的有限子集 I' 以及常数 $C>0$，使得

$$q_{J'}(u(x)) \le Cp_{I'}(x)$$

其中 $q_{J'}:=\max_{j\in J'}\{q_j\}, p_{I'}:=\max_{i\in I'}\{p_i\}$. 特别地，若 Y 为赋范空间，则 u 连续当且仅当存在 I 的有限子集 I' 以及常数 $C>0$，使得

$$||u(x)|| \le Cp_{I'}(x)$$

证明. 先证必要性. 对任意有限子集 $J'(\subset J)$，$B_{q_{J'}}(0,1)$ 为 Y 中开球. 由于 u 连续，$u^{-1}(B_{q_{J'}}(0,1))$ 为 X 中开集. 因此，存在有限子集 $I'\subset I$ 以及 $r>0$ 使得

$$B_{p_{I'}}(0,r)\subset u^{-1}(B_{q_{J'}}(0,1))$$

即当 $x\in B_{p_{I'}}$(等价于 $p_{I'}(x)<r$) 时

$$q_{J'}(u(x))<1$$

注意到对任意 $x\in X$ 以及 $\delta>0$，有 $\frac{r}{p_{I'}(x)+\delta}\in B_{q_{I'}}(0,r)$，进而

$$q_{J'}\left(u\left(\frac{r}{p_{I'}(x)+\delta}x\right)\right)<1$$

由 u 的线性性，我们有

$$q_{J'}(u(x))<\frac{p_{I'}(x)+\delta}{r}$$

令 $\delta\to 0$ 以及 $C=1/r$，于是

$$q_{J'}(u(x))\le Cp_{I'}(x)$$

再证充分性. 对任意 Y 中邻域 $V \in \mathcal{N}_Y(O)$，存在有限子集 $J'(\subset J)$ 以及 $\epsilon > 0$，使得

$$B_{q_{J'}}(0,\epsilon) \subset V$$

已知条件蕴含存在有限子集 $I'(\subset I)$ 以及 $C > 0$，令 $r = \epsilon/C$，于是

$$B_{p_{I'}}(0,r) \subset u^{-1}\left(B_{q_{J'}}(0,\epsilon)\right)$$

因此 $u^{-1}\left(B_{q_{J'}}(0,\epsilon)\right)$ 为 X 中原点 O 的一个邻域，进而 $u^{-1}(V)$ 也为 O 的一个邻域，故 u 连续. $\square$

2.2. 局部凸空间.

2.2.1. *局部凸空间的性质.* 回忆命题1.3的 (4)，我们知道一般拓扑向量空间存在平衡的邻域基，而对于局部凸的 TVS，上述平衡邻域基可以加强为凸平衡邻域基.

命题 2.3. 设 X 为 LC，则原点 O 存在凸的平衡邻域基.

证明. 对任意 $V \in \mathcal{N}(O)$，由局部凸性可知存在凸邻域 $A(\subset V)$，又由命题1.3的 (4)，存在平衡的邻域 $B(\subset A)$. 定义 B 的**凸包**:

$$U := \mathrm{conv}(B) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i : 0 \le \lambda_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

B 的平衡性蕴含 conv 为平衡集 (留作习题). 注意到 $\mathrm{conv}(B)$ 为包含 B 的小凸集，以及 A 的凸性可知

$$U \subset A \subset V$$

结合命题1.2可知 $\mathrm{Int}(U)$ 为原点 O 的凸的平衡开邻域，且

$$\mathrm{Int}(U) \subset V$$

因此 O 存在凸的平衡开邻域基. 利用命题1.3的 (4) 可知原点 O 存在平衡的闭邻域基，与上述同样的方法说明 $\overline{U} \subset V$(细节留给读者补充). $\square$

练习 2.3. (1) 证明当 B 为平衡集时，$\mathrm{conv}(B)$ 为平衡集.
(2) 补充上述证明中凸的闭邻域基存在性的细节.

2.2.2. *Minkowski 泛函*. 最后，我们将证明本章中最重要的一个结果，半赋范空间与局部凸空间等价. 为此我们引入一个概念.

定义 2.4. 设 X 为 TVS，Ω 为 X 中原点 O 的凸的平衡开邻域. 称 $p_\Omega : X \to \mathbb{R}$ 为关于 Ω 的 **Minkowski 泛函**，如果

$$p_\Omega(x) := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}$$

命题 2.4. 设 $I(x) := \left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}$，于是

(1) $I(x) = (p_\Omega(x), \infty)$;

(2) $p_\Omega(x) < 1$ 当且仅当 $x \in \Omega$.

证明. (2) 是 (1) 的自然推论，下面证明 (1). 断言：当 $\lambda \in I(x)$ 以及 $\mu > \lambda$，则 $\mu \in I(x)$. 事实上由于 Ω 是平衡的，于是

$$\frac{x}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{x}{\lambda} \in \Omega$$

又任取 $\lambda_0 \in I(x)$，由于映射 $\lambda \mapsto x/\lambda$ 的连续性以及 $x/\lambda_0 \in \Omega$，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$(\lambda_0 - \epsilon, \lambda + \epsilon) \subset I(x)$$

因此 $I(x) = (p_\Omega(x), \infty)$. □

练习 2.4. 证明上述命题中的 (2).

引理 2.1. 设 X 为 TVS，$\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ 为原点 O 的凸的平衡开邻域，于是

(1) Minkowski 泛函 p_Ω 是 X 上的半范数，并且

$$\Omega = \{x \in X : p_\Omega(x) < 1\}$$

(2) 若 $\Omega_1 \subset \Omega_2$，则 $I_{\Omega_1}(x) \subset I_{\Omega_2}(x)$，从而 $p_{\Omega_2} \leq p_{\Omega_1}$;

(3) 存在 $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$，使得

$$p_{\Omega_3} \geq \max\{p_{\Omega_1}, p_{\Omega_2}\}$$

(4) p_Ω 在原始拓扑 τ 下是连续的.

证明. 上述引理中的 (2) 和 (3) 是显然的，留给读者验证. 其中 (1) 的

$$\Omega = \{x \in X : p_\Omega(x) < 1\}$$

已被上一命题证明 (见上述练习). 我们只验证 p_Ω 是半范数.

- 显然 $p_\Omega \geq 0$.
- 正齐次性. 任取 $(0 \neq)\alpha \in \mathbb{K}$ 以及 $x \in X$，注意到

  $$I(\alpha x) = \left\{\lambda > 0 : \frac{\alpha x}{\lambda} \in \Omega\right\} = \left\{\lambda > 0 : \frac{\frac{\alpha}{|\alpha|}x}{\frac{\lambda}{|\alpha|}} \in \Omega\right\}$$

  由于 Ω 平衡，进而 $\frac{\alpha}{|\alpha|}\left(\frac{x}{\lambda/|\alpha|}\right) \in \Omega$ 等价于 $\frac{x}{\lambda/|\alpha|} \in \Omega$，于是 $\lambda/|\alpha| \in I(x)$，这说明 $\lambda \in I(\alpha x)$，等价于 $\lambda/|\alpha| \in I(x)$，即

  $$p_\Omega(\alpha x) = |\alpha| p_\Omega(x)$$

  当 $\alpha = 0$ 时显然成立.
- 三角不等式. 取 $\lambda \in I(x), \mu \in I(y)$，即 $x/\lambda \in \Omega$，$y/\mu \in \Omega$. 由于 Ω 凸，于是

  $$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{y}{\mu} \in \Omega$$

  因此 $p_\Omega(x+y) \leq \lambda + \mu$，对 λ, μ 取下确界有

  $$p_\Omega(x+y) \leq p_\Omega(x) + p_\Omega(y)$$

最后证明 (4). 对任意 $\epsilon > 0$，由 (1) 可知

$$p_\Omega^{-1}((-\epsilon, \epsilon)) = \epsilon p_\Omega((-1,1)) = \epsilon\Omega$$

即 p_Ω 在原点 O 处连续. 对任意 $x_0 \in X$，$x \in x_0 + \Omega$，我们有

$$|p_\Omega(x) - p_\Omega(x_0)| \leq p_\Omega(x - x_0) < \epsilon$$

因此 p 在 x_0 处连续. □

定理 2.2. 设 X 为 LC，以及 (p_Ω) 为半范数族，其中 Ω 取遍 X 中原点的凸平衡开邻域，那么 (p_Ω) 诱导的拓扑 τ' 与 X 上的原始拓扑 τ 一致. 这说明局部凸空间是半赋范空间.

证明. 命题2.1蕴含 $\tau' \subset \tau$. 反过来，任取 $V \in \mathcal{N}_\tau(O)$，由命题2.3，存在凸的平衡开邻域 $\Omega \in \mathcal{N}_\tau(O)$ 使得 $\Omega \subset V$，那么

$$\Omega = \{x \in X : p_\Omega(x) < 1\}$$

为拓扑 τ' 下的开单位球 $B_{p_\Omega}(0,1)$，即

$$\Omega = B_{p_\Omega}(0,1) \in \mathcal{N}_{\tau'}(O)$$

因此 $V \in \mathcal{N}_{\tau'}(O)$. 故 $\tau \subset \tau'$. $\square$

3. 局部凸空间的例子与若干注记

3.1. 局部凸空间的例子. 所有的赋范空间都是拓扑向量空间，一个有趣的例子是 $\mathcal{L}^p$ 空间当 $0 < p < 1$ 时的情况，见问题24. 在给出大部分非平凡的例子之前，我们叙述一个判断 Hausdorff 局部凸空间是否可度量化的命题，感兴趣的读者可以参见 [**32**] p144 习题 8.

命题 3.1. 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，其上拓扑由半范数族 $(p_i)_{i\in I}$，则以下说法互相等价：

(1) X 可度量化；
(2) X 的原点 O 有可数邻域基；
(3) X 的任一点有可数邻域基；
(4) X 上的拓扑可由半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 的**可数的**可分点的子族诱导；
(5) X 上的拓扑可由半范数族 $(p_i)_{i\in I}$ 的**可数的**可分点的**定向**子族诱导；
(6) X 上的度量可由平移不变的距离诱导.

实可微函数空间是函数论与方程中主要的研究对象，我们将从闭区间 $[0,1]$ 上的函数空间开始构造.

例 3.1 ((实) 可微函数空间). 设

$$C^m([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | \text{函数 } f \text{ 存在 } m \text{ 阶连续导数}\}$$

其中 $f^{(i)}$ 表示 i 阶导函数，$m \in \mathbb{N}^+$ 或 $m = \infty$，后者称光滑函数空间. 规定其上的半范数

$$p_i(f) := \sup_{0\le x\le 1} |f^{(i)}(x)|, \quad i = 1, 2, \cdots$$

事实上可以直接定向化为

$$q_k(f) := \sup_{1\le i\le k,\ 0\le x\le 1} |f^{(i)}(x)|, \quad k = 1, 2, \cdots$$

注意到上述半范数族可分点，利用命题3.1的 (5) 可知 $C^m([0,1])$ 可度量化，并且相应的度量是完备的 (注意到每阶导函数在相应半范数下的收敛为一致收敛). 当 $m = \infty$，不可用一个半范数诱导该拓扑.

将其推广到多元函数，即考虑区域 $[0,1]^d$，可以定义 $C^m([0,1]^d) := \{f:[0,1]^d \to \mathbb{R} | f\text{的 } m \text{ 阶连续偏导数连续}\}$ 上的半范数为

$$p_\alpha(f) := \sup_{x\in[0,1]^d} |\partial^\alpha f(x)|$$

其中 $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_d^{\alpha_d}$，$\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$ 为多重指标，$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$，满足 $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_d \le m$.

对于一般区域，例如 $\mathbb{R}^d$ 中开区域 Ω，我们将定义半范数为

$$p_{K,\alpha}(f) := \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)|$$

其中 K 为 Ω 中任一紧子集. 利用 Ω 中紧子集**穷竭**的方法取出一列以包含关系递增的紧子集 $(K_n)_{n\ge1}$：

$$\emptyset \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset \Omega$$

使得 $(p_{K_n,\alpha})_{n\ge1}$ 是定向的可数可分点的半范数族，结合命题3.1可知 $C^m(\Omega)$ 可度量化，并且相应的度量是完备的.

但并非所有规定的半范数族诱导的拓扑可度量化，例如紧支集可微函数空间

$$C_c^m := \{f:[0,1]^d \to \mathbb{R} | f\text{的 } m \text{ 阶连续偏导数连续且具有紧的支撑集}\}$$

其中**支撑集**指的是

$$\mathrm{supp} f := \{x\in\Omega : f(x) \ne 0\}$$

其上定义半范数为：任取 $\varphi \in C(\Omega)$，

$$p_{\varphi,\alpha}(f) := \sup_{x\in\Omega}\{\varphi(x)\partial^\alpha f(x)\}, \quad |\alpha| \le m$$

诱导的拓扑不可度量化.

我们曾在度量空间中列举过例1.5，现在考虑其上可能的半范数结构.

例 3.2 (连续函数空间). 设 X 为一个局部紧的 Hausdorff 空间，例如 X 为 $\mathbb{R}^d$ 或 $\mathbb{C}$ 中的开区域，并令 $C(X) := C(X,\mathbb{K})$. 规定其上的半范数

$$p_K(f) := \sup_{x\in K} |f(x)|$$

其中 K 为 Ω 的任一紧子集. 通过穷竭的方法同样可以说明该半范数族诱导的拓扑是可度量化的，并且相应的度量完备. 事实上，该拓扑对应的收敛就是紧一致收敛，回忆例1.5中度量 Δ_K 诱导的拓扑. 我们将在第5章中进一步讨论之.

更特殊地，考虑

$$\mathcal{H}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f \text{为区域 } \Omega \text{ 上的全纯函数}\}$$

赋予上述半范数族，同样成为完备的可度量化局部凸空间，在解析函数论与复分析中有很大的应用，参见 [**7, 10, 16, 9**].

最后一个例子由法国数学家 Schwartz 构造，用于研究广义函数空间上的 Fourier 变换，参见 [**35, 25, 6, 21**]，我们将在第10章中进一步讨论.

例 3.3. 称 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 为 **Schwartz 空间** (或称**速降函数空间**)，其中

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : ||f||_{\alpha,\beta} < \infty, \ \forall \alpha, \beta\}$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$，且

$$||f||_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$$

其中 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. 于是 $(|| - ||_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ 为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的半范数族使得 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 成为局部凸空间. 与上述例子类似的方法可以证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个可度量化空间并且度量是完备的，但不可赋范.

3.2. 拓扑向量空间的若干注记. 关于拓扑向量空间更多一般的叙述可以参见 [**32, 17**].

习题四

问题 24. 令 $0 < p < 1$, 考虑空间 $L_p = L_p(0,1)$, 并在 L_p 上赋予距离 $d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p$. 本习题的目标是证明 L_p 不是局部凸的且没有非零线性泛函.

(1) 证明: L_p 是拓扑向量空间. 接下来, 我们先考虑 $p = \frac{1}{2}$ 的情形, 用 $B(r)$ 表示中心在原点、半径为 r 的 $L_{\frac{1}{2}}$ 中的闭单位球: $B(r) = \left\{ f \in L_{\frac{1}{2}} \colon \|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \leqslant r \right\}$.

(2) 取 $f \in B(\sqrt{2}r)$. 证明: 存在 $t_0 \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^{t_0} |f(t)|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

(3) 定义

$$g(t) = \begin{cases} 2f(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0, & t_0 < t \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{且} \quad h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 2f(t), & t_0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

证明:

$$g, h \in B(r) \quad \text{且} \quad f = \frac{g}{2} + \frac{h}{2}.$$

(4) 由此导出 $B(\sqrt{2}r) \subset \operatorname{conv}(B(r))$, 并有 $\operatorname{conv}(B(r)) = L_{\frac{1}{2}}$.

(5) 得出 $L_{\frac{1}{2}}$ 是非局部凸的.

(6) 把以上结论推广到 $0 < p < 1$ 的情形.

(7) 证明: L_p 上只有零线性泛函是连续的.

Part 2

空间理论的进一步讨论

CHAPTER 5

连续映射空间

旨趣. 我们回忆古典函数逼近论中两大逼近定理，即 Weierstrass 第一第二逼近定理 (其中第二逼近定理已在第3章中给出证明)，分别刻画任一连续函数可被多项式函数逼近以及任一周期连续函数可被三角多项式函数逼近. 本章将把这套逼近定理推广到更一般的连续函数空间，即研究从紧 Hausdorff 空间到一般度量空间上的连续映射能否被满足某些条件的函数列一致逼近 (选取一致度量 Δ)，在上一部分空间理论中被转化为子空间稠密性的问题. 又注意到连续映射构成代数，因此一个更一般的问题是：给定连续映射空间 (代数)，存在何种性质的稠密子代数? 为此, 我们先介绍 Ascoli 定理, 通过为逐点收敛加上等度连续的条件刻画更一般的一致收敛，此外，通过映射族轨道的紧性推出映射族的紧性；利用这个技术可以证明第1章在常微分方程解存在性上遗留的问题以及单复分析中的 Montel 定理，在偏微分方程以及 Sobolev 空间中有进一步的应用, 见第10或参见 [**6, 35, 2**]. 最后, 我们用一般形式的 Weierstrass 定理再次给出三角多项式空间 $\mathcal{T}$ 在 $C_{2\pi}$ 乃至 $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ 中的稠密性，并且说明 Fourier 变换算子 $\mathcal{F}:\mathcal{L}^1_{2\pi}\to c_0(\mathbb{Z})$ 为单射，即 Riemann-Lebesgue 引理.

1. 等度连续与 Ascoli 定理

本章中若不加说明, 我们均假设 K 为紧的 Hausdorff 空间, (E,d) 为度量空间, 并且 $C(K,E)$ 表示全体 K 到 E 的连续映射构成的集合, 其在一致度量 Δ 下构成完备的度量空间, 参见例1.5. 特别地, 当 $(E,||-||)$ 为赋范空间时, Δ 为由范数 $||-||_\infty$ 诱导的度量, 其中

$$||f||_\infty := \sup_{x\in K}||f(x)||$$

当 E 为 Banach 空间时, $(C(K,E),||-||_\infty)$ 也为 Banach 空间 (参见定理2.1). 回忆例1.5, 在连续映射空间 $(C(K,E),\Delta)$ 中, 映射列的一致收敛等价于依度量 Δ 收敛, 特别地, 依照范数 $||-||_\infty$ 收敛.

1.1. 等度连续的定义与性质.

定义 1.1. 设 K 为拓扑空间, E 为度量空间, $\mathcal{H}\subset C(K,E)$. 称 $\mathcal{H}$ 在点 $x_0(\in K)$ 处是**等度连续的**, 如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 x_0 的邻域 $V\in\mathcal{N}(x_0)$, 使得

$$d(f(x),d(x_0))<\epsilon,\quad \forall x\in K, f\in\mathcal{H}$$

进一步称 $\mathcal{H}$ 在 K 上等度连续 (简记为 EC), 如果其在 K 上每一点等等度连续. 特别地, 当 (K,δ) 为度量空间时, 称 $\mathcal{H}$ 在 K 上一致等度连续 (简记为 UEC), 如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$d(f(x),f(y))<\epsilon,\quad \delta(x,y)<\eta,\forall f\in\mathcal{H}$$

注 1.1. (1) 若 $\mathcal{H}=\{f\}$, $\mathcal{H}$ 的等度连续性和一致等度连续性也就是 f 的连续性和一致连续性. 更一般地, $C(K,E)$ 中有限个元素不影响任意子集 $\mathcal{H}$ 的 (一致) 等度连续性.

(2) 一致等度连续蕴含等度连续; Lipschitz 连续甚至 Hölder 连续的函数列蕴含等度连续 (见定义2.1).

(3) 设函数列 $(f_n)_{n\geq 1}\subset C(K,E)$. 若 $(f_n)_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f\in C(K,E)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}d(f_n(x),f(x))=0,$$

则 $(f_n)_{n\geq 1}$ 等度连续.

我们知道单个映射在紧度量空间上连续等价于一致连续，对于映射族也有类似的性质.

命题 1.1. 设 (K,δ) 为紧度量空间, E 为度量空间, $\mathcal{H}\subset C(K,E)$, 那么 $\mathcal{H}$ 等度连续当且仅当一致等度连续.

证明. 充分性是显然的，下证明必要性. 对任意 $\epsilon>0$，因 $\mathcal{H}$ 在 K 上等度连续，则对每一个 $x\in K$，存在 $\eta(x)>0$，使得

$$d(f(x),f(y))<\epsilon,\quad \forall y\in B(x,\eta(x)),\ f\in\mathcal{H}$$

由紧性，存在有限个元素 $x_1,\cdots,x_n\in K$，使得

$$K=\bigcup_{k=1}^{n}B\left(x_k,\frac{\eta(x_k)}{2}\right)$$

取

$$\eta=\min\left\{\frac{\eta(x_1)}{2},\cdots,\frac{\eta(x_n)}{2}\right\}.$$

当 $\delta(x,y)<\eta$，存在 k，使得 $x\in B(x_k,\frac{\eta(x_k)}{2})$，进而

$$\delta(y,x_k)\le\delta(y,x)+\delta(x,x_k)<\eta+\frac{\eta(x_k)}{2}\le\eta(x_k)$$

于是

$$d(f(x),f(y))\le d(f(x),f(x_k))+d(f(x_k),f(y))<2\epsilon$$

这说明 $\mathcal{H}$ 一致等度连续. □

数学分析中我们知道一列连续函数逐点收敛的像不是连续函数，例如闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数列 $(x^n)_{n\ge1}$，其逐点收敛的极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\in[0,1)\end{cases}$$

不是连续的.

练习 1.1. 验证上述函数列在 $[0,1]$ 上不是等度连续的，并指出其等度连续的区间.

事实上利用等度连续性可以实现连续函数列从逐点收敛到一致收敛的过渡.

命题 1.2. 设 K 为紧的 Hausdorff 空间, E 为度量空间. 若逐点收敛与 f 的函数列 $(f_n)_{n\geq 1}(\subset C(K,E))$ 是等度连续的，则 $f\in C(K,E)$ 并且 (f_n) 一致收敛.

证明. 先证明极限函数 $f\in C(K,E)$. 设 $x\in K$. 因 $(f_n)_{n\geq 1}$ 等度连续，故任取 $\epsilon>0$，存在 $V_x\in N(x)$，使得

$$d(f_n(y),f_n(x))<\epsilon,\quad \forall y\in V_x,\ n\geq 1$$

因此

$$\begin{aligned} d(f(y),f(x)) &\leq d(f(y),f_n(y))+d(f_n(x),f(x))+d(f_n(y),f_n(x)) \\ &\leq d(f(y),f_n(y))+d(f_n(x),f(x))+\epsilon \end{aligned}$$

因 (f_n) 逐点收敛到 f，故令 $n\to\infty$，可得

$$d(f(y),f(x))<\epsilon$$

由此推出 f 在 x 处连续.

由于 x 是 K 任意元素, 可得 $f\in C(K,E)$. 因 K 是紧的 Hausdorff 空间，故对任意 $\epsilon>0$，存在有限个元素 $x_1,\cdots,x_n\in E$ 及相应的邻域 $V_{x_1},\cdots,V_{x_n}$，使得

$$K=\bigcup_{k=1}^{n}V_{x_k}.$$

则任取 $x\in K$，必有某个 x_k 使得 $x\in V_{x_k}$. 那么当 n 充分大时，必有

$$d(f_n(x),f(x))\leq d(f_n(x),f_n(x_k))+d(f_n(x_k),f(x_k))+d(f(x_k),f(x))\leq 3\epsilon$$

故 (f_n) 一致收敛到 f. □

1.2. Ascoli 定理：一般形式. 下面我们介绍一般形式的 Ascoli 定理，读者可以参见 [**32, 17**].

定理 1.1 (Ascoli 定理，一般形式). 设 K 为紧的 Hausdorff 空间, (E,d) 为度量空间，$\mathcal{H}\subset C(K,E)$. 则 $\mathcal{H}$ 在 $C(K,E)$ 中相对紧 (即 $\overline{\mathcal{H}}$ 紧) 当且仅当:

(1) $\mathcal{H}$ 等度连续;

(2) 对任意 $x \in K$，映射列 $\mathcal{H}$ 的**轨道**

$$\mathcal{H}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$$

在 E 中相对紧.

证明. 必要性. 任取 $\epsilon > 0$. 因 $\mathcal{H}$ 是紧的,故存在有限个 $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$，使得任取 $f \in \mathcal{H}$，总存在某个 $1 \leq k \leq n$，使得 $\Delta(f, f_k) < \epsilon$. 由于 $f_1, \cdots, f_n$ 连续，故对任一点 $x \in K$，存在 $V \in \mathcal{N}(x)$，使得

$$d(f_k(x), f_k(y)) < \epsilon, \quad \forall y \in V,\ 1 \leq k \leq n.$$

因此

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f_k(y)) + d(f_k(y), f(y)) < 3\epsilon$$

所以 $\mathcal{H}$ 等度连续.

对任一给定的 $x \in K$，考虑映射 $\Phi : C(K, E) \to E, f \mapsto f(x)$，显然 Φ 连续，进而 $\Phi(\mathcal{H})$ 紧，因此 $\mathcal{H}(x)$ 在 E 中的相对紧.

充分性. 回忆定理1.8，通过证明 $\overline{\mathcal{H}}$ 完备且预紧来说明紧性.

我们分以下三步证明.

Step 1 证明 $\overline{\mathcal{H}}$ 完备. 任取 $\mathcal{H}$ 中的 Cauchy 序列 $(f_n)_{n\geq 1}$，则对任一个 $x \in K$，$(f_n(x))_{n\geq 1}$ 也是 E 中的 Cauchy 序列. 因 $\mathcal{H}(x)$ 是相对紧的, 故 $(f_n(x))_{n\geq 1}$ 有收敛子列. 那么由于 $(f_n(x))_{n\geq 1}$ 是 Cauchy 序列，则 $(f_n(x))_{n\geq 1}$ 也收敛. 由命题1.2可知 $(f_n)_{n\geq 1}$ 一致收敛，故 $\mathcal{H}$ 是完备的.

Step 2 构造 ϵ-网. 由于 $\mathcal{H}$ 等度连续，则对任意 $x \in K$ 及任意 $\epsilon > 0$，存在开集 $O_x \in \mathcal{N}(x)$，使得当 $y \in O_x$ 时，有 $d(f(y), f(x)) < \epsilon, \forall f \in \mathcal{H}$. 因为 K 是紧的，故存在有限个开集 $O_{x_1}, \cdots, O_{x_n}$，使得 $K = \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$.

因 $\mathcal{H}(x)$ 是度量空间 E 中的相对紧集，故是预紧的，也就是说存在有限的 ϵ-网覆盖 $\mathcal{H}(x)$. 那么存在有限集 $Z \subset E$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{H}(x_i) \subset \bigcup_{z \in Z} B(z, \epsilon)$$

接下来，我们考虑有限集合 Z^n. 对任意 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in Z^n$，令

$$B_z=\left\{f\in C(K,E):\sup_{1\le i\le n}\sup_{x\in O_{x_i}}d(f(x),z_i)<2\epsilon\right\}$$

则我们如此得到 $C(K,E)$ 中的有限多个子集 $(B_z)_{z\in Z^n}$. 对任意 $f,g\in B_z$，有

$$\Delta(f,g)\le\sup_{1\le i\le n}\sup_{x\in O_{x_i}}\left(d(f(x),z_i)+d(g(x),z_i)\right)<4\epsilon$$

故 $\mathrm{diam}B_z<4\epsilon$.

Step 3 验证 ϵ-网覆盖. 只需证明所有 B_z 的并集包含 $\mathcal{H}$.

任取 $f\in\mathcal{H}$. 我们知道，对任意 $1\le i\le n$，$f(x_i)$ 属于某个 $B(z_i,\epsilon)$，$z_i\in Z$. 因此当 $x\in O_{x_i}$ 时，有

$$d(f(x),z_i)\le d(f(x),f(x_i))+d(f(x_i),z_i)<2\epsilon.$$

令 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，则有

$$\sup_{1\le i\le n}\sup_{x\in O_{x_i}}d(f(x),z_i)<2\epsilon,$$

即 $f\in B_z$. 因此我们证明了 $\mathcal{H}\subset\bigcup_{z\in Z^n}B_z$.

□

以上一般形式的 Ascoli 定理在具体问题上往往使用其充分性，即说明某个连续映射族的等度连续性后得到整个映射族的相对紧性，此外，映射族的相对紧性需要被刻画为度量空间中紧集的其他表述，回忆定理1.8，我们往往用到映射族中存在 Δ 收敛的子列. 就仅选择子列而言，我们可以通过**对角线选择法**给出当 (K,δ) 为紧度量空间时的 Ascoli 定理的证明，感兴趣的读者可以参考 [**32**] p104 习题 7，或 [**30, 33**]. 我们将具体的步骤叙述在问题25.

作为推论，或再次使用对角线选择法，我们可以证明以下更好用的推论，证明参见 [**32**]:

推论 1.1. 设 Ω 为欧式空间 $\mathbb{K}^n$ 中开区域，$(f_n)_{n\ge1}(\subset C(\Omega,\mathbb{K}^n))$. 若

(1) (f_n) 在 Ω 任一紧子集 K 上等度连续；

(2) 对任一 $x \in \Omega$，轨道 $(f_n(x))_{n\geq 1}$ 有界 (此时等价于紧)
则存在子列 $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ 使得 (f_{n_k}) 一致收敛于某个连续函数 f.

1.3. Ascoli 定理的应用. 下面我们给出若干 Ascoli 定理的应用.

1.3.1. *常微分方程解的存在性: Peano 定理.* 我们在完备度量空间中介绍了利用压缩映射原理说明常微分方程解的存在唯一性问题，回忆定理2.1以及问题10. 而尽可能降低 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

中函数 $f(x,y)$ 的正则性使得方程仅仅存在解是相对困难的问题. 当函数 f 仅连续时，Euler 早期在常微分方程中的工作是利用 Euler 折线做成的序列去逼近，其中利用 Ascoli 定理说明序列存在收敛的子列，最终逼近到所要求的解，感兴趣的读者可以参见 [**22**].

1.3.2. *解析函数论: Montel 定理.* 另一个应用来自于单复分析中的全纯函数列的收敛问题，我们将其叙述如下:

定理 1.2 (Montel). 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中开区域，$(f_n)_{n\geq 1}$ 为 Ω 上定义的一列全纯函数. 若对 Ω 的任一紧子集 K，(f_n) 在其上一致有界，则存在子列 (f_{n_k}) 在 Ω 的任一紧子集 K 上一致收敛于一 Ω 上的全纯函数 f.

证明. 设有 $z_0 \in \Omega, r > 0$，使得

$$\overline{D}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$$

由 Cauchy 公式，有

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_n(u)}{u-z}\mathrm{d}u, \quad z \in D(z_0,r)$$

对 z 求导数，得

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_n(u)}{(u-z)^2}\mathrm{d}u$$

因此，

$$|f_n'(z)| \leq \sup_{z\in\overline{D}(z_0,r)} |f_n(z)| \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{1}{|u-z|^2}\mathrm{d}u$$

于是

$$\sup_n \sup_{z\in\overline{D}(z_0,\bar{z})} |f_n'(z)| \le \frac{4}{r} \sup_n \sup_{z\in\overline{D}(z_0,r)} |f_n(z)| = C_r < \infty$$

因此，我们推出 $(f_n|_{\overline{D}(z_0,\bar{z})})_{n\ge 1}$ 是常数为 C_r 的 Lipschitz 函数列，故等度连续.

那么对每个紧子集 $K\subset\Omega$，K 可被有限多个 $D(z_0,\bar{z})$ 覆盖，因此 $(f_n|_K)$ 等度连续. 由上一推论可知，(f_n) 有一子列 $(f_{n_k})_{k\ge 1}$，它在 Ω 的任一紧子集 K 上一致收敛. 最后，由解析函数理论可知，在任意紧集上一致收敛的全纯函数列的极限函数必全纯. 所以定理得证. $\square$

2. Stone-Weierstrass 定理

本节中 K 均表示紧的 Hausdorff 空间，$C(K,\mathbb{K})$ 表示全体从 K 到 $\mathbb{K}$ 的连续映射在一致范数 $||-||_\infty$ 下构成的 Banach 代数，注意到其对函数乘法

$$fg(x) := f(x)\cdot g(x), \quad \forall x\in K$$

封闭.

2.1. 子代数及其性质.

定义 2.1. 设 $\mathcal{A}\subset C(K,\mathbb{K})$，

(1) 称 A 为 $C(K,\mathbb{K})$ 的**子代数**，如果 A 为向量子空间且对乘法运算封闭；
(2) 称 A 是**可分点的**，如果对不同的元素 $x,y(\in K)$，存在函数 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq f(y)$；(等价于对任意 $(0\neq)x(\in K)$，存在函数 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq 0$.)
(3) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，称 A 为**格**，如果对任意 $f,g(\in\mathcal{A})$，满足 $\max\{f,g\},\min\{f,g\}\in\mathcal{A}$.

在分析中我们经常将整个空间的问题转移到一个稠密子空间上考虑，最后利用序列逼近到整个空间. 因此这里亟待解决的问题就是：$C(K,\mathbb{K})$ 的稠密子代数有什么特征? 著名的 Stone-Weierstrass 定理解决了这个问题. 事实上，在具体的问题中我们经常用到闭区间 $[a,b]$ 上的多项式函数空间作为 $C([a,b])$ 的稠密子代数，这是 Weierstrass 在函数逼近论中早期的结果，称为 Weierstrass 第一逼近定理，读者可以参考 [**15**]. 泛函分析中将这套理论中抽象的性质提取出来，我们发现只用到“存在某种单位元的”子代数的可分点性质即可蕴含子代数的稠密性，参见 [**32, 8, 9**].

为此我们需要两个引理.

引理 2.1. $C(K,\mathbb{K})$ 的闭子代数是一个格.

证明. 设 $f\in\mathcal{A}$. 由于 $C(K,\mathbb{R})$ 中的函数一定有界，故不妨令 $\|f\|_\infty\leq 1$. 为证 $\mathcal{A}$ 是格，我们只需证明 $|f|\in\mathcal{A}$. 实际上，这是因为

任取 $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$, 我们有

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(f_1+f_2+|f_1-f_2|), \quad \min\{f_1, f_2\} = \frac{1}{2}(f_1+f_2-|f_1-f_2|),$$

则由 $\mathcal{A}$ 是一个向量空间以及 $|f| \in \mathcal{A}$ 可知 $\max\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_2\} \in \mathcal{A}$, 即 $\mathcal{A}$ 是一个格.

令 $t \in \mathbb{R}$ 且 $|t| \leq 1$. 任取 $\epsilon > 0$, 令 $u = \frac{1-t^2}{1+\epsilon^2}$, 则

$$1 - u = \frac{\epsilon^2 + t^2}{1 + \epsilon^2}, \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{1 + \epsilon^2} = \delta < 1$$

通过 Taylor 级数，我们有

$$\sqrt{1-u} = \sum_{n \geq 0} a_n u^n$$

而且上述级数对 $u \in [0, \delta]$ 一致收敛. 因此，存在一个部分和 P, 使得

$$\sup_{0 \leq u \leq \delta} |\sqrt{1-u} - P(u)| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

P 是 u 的一个多项式. 回到变量 t, 我们得到

$$\sup_{|t| \leq 1} \left| \sqrt{\frac{\epsilon^2 + t^2}{1 + \epsilon^2}} - P\left(\frac{1-t^2}{1+\epsilon^2}\right) \right| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

故

$$\sup_{|t| \leq 1} \left| \sqrt{\epsilon^2 + t^2} - \sqrt{1+\epsilon^2} P\left(\frac{1-t^2}{1+\epsilon^2}\right) \right| \leq$$

设 $Q(t) = \sqrt{1+\epsilon^2} P\left(\frac{1-t^2}{1+\epsilon^2}\right)$, 则 Q 仍是一个多项式. 上述不等式成为

$$\sup_{|t| \leq 1} \left| \sqrt{\epsilon^2 + t^2} - Q(t) \right| \leq \epsilon.$$

特别地，$|Q(0)| \leq 2\epsilon$. 再设 $R(t) = Q(t) - Q(0)$ 则 R 是没有常数项的多项式. 又因 $0 \leq \sqrt{\epsilon^2 + t^2} - \sqrt{t^2} \leq \epsilon$, 故可得

$$\sup_{|t| \leq 1} |t| - R(t)| \leq 4\epsilon.$$

因此，令 $t = f(x), x \in K$，我们推出

$$\sup_{x \in K} ||f(x)| - R(f(x))|| \leq 4\epsilon.$$

这意味着 $\||f|-R(f)\|_\infty \le 4\epsilon$. 因 $\mathcal{A}$ 是子代数且多项式 R 没有常数项，知 $R(f)\in\mathcal{A}$, 因此，$|f|$ 可由 $\mathcal{A}$ 中的元一致逼近，即 $|f|\in\overline{\mathcal{A}}$. 但 $\mathcal{A}$ 是闭的，我们最后得到 $|f|\in\mathcal{A}$. □

引理 2.2. 设 $\mathcal{A}$ 为 $C(K,\mathbb{K})$ 的子代数，且满足

(1) $\mathcal{A}$ 在 K 上可分点；

(2) 对任意 $x\in K$，存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq 0$.

那么

(1) 任取 $x\in K$ 以及 $\alpha\in\mathbb{R}$，存在 $h\in\mathcal{A}$ 使得 $h(x)=\alpha$；

(2) 任取 $x\neq y\in K$，以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，存在 $h\in\mathcal{A}$ 使得 $h(x)=\alpha$ 且 $h(y)=\beta$.

证明. (1) 任取 $x\in K$. 由条件 (2) 可知存在 $g\in\mathcal{A}$, 使得 $g(x)\neq 0$, 记 $b=g(x)$. 取 $h=\frac{\alpha g}{b}$, 则有 $h\in\mathcal{A}$ 且 $h(x)=\alpha$.

(2) 任取 $x\neq y\in K$. 由于 $\mathcal{A}$ 是可分点的，故必有 $f\in\mathcal{A}$, 使得 $f(x)\neq f(y)$. 我们宣称还可选取 f 使得 $f(x)\neq 0$ 且 $f(y)\neq 0$. 事实上，如果后一结论不成立，可以假设 $f(x)=0$, 那么 $f(y)\neq 0$; 然后再选择一个函数 g, 使得 $g(x)\neq 0$. 取 $\epsilon>0$, 设 $\tilde{f}=\epsilon g+f$, 则
- 由线性性，可得 $\tilde{f}\in\mathcal{A}$.
- 对任意 $\epsilon>0$, 有 $tilde f(x)=\epsilon g(x)\neq 0$.
- 因 $f(y)\neq 0$, 当 ϵ 足够小时，有 $\tilde{f}(y)=\epsilon g(y)+f(y)\neq 0$.
- 当 ϵ 足够小时，有 $\tilde{f}(x)\neq\tilde{f}(y)$.

因此，$\tilde{f}$ 是所要求的函数. 综合以上讨论即知，存在一个函数 $f\in\mathcal{A}$, 满足 $f(x)\neq 0, f(y)\neq 0$ 且 $f(x)\neq f(y)$. 接下来对 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 我们构造一个新的函数

$$h=\lambda f+\mu f^2.$$

显然 $h\in\mathcal{A}$. 我们要求 λ,μ 的选取使得 $h(x)=\alpha$ 及 $h(y)=\beta$, 这等价于求下面关于 λ 和 μ 的线性方程组

$$\begin{cases}\lambda f(x)+\mu f(x)^2=\alpha,\\ \lambda f(y)+\mu f(y)^2=\beta.\end{cases}$$

由于 $f(x)\neq f(y), f(x)\neq 0$ 且 $f(y)\neq 0$, 以上线性方程组的系数行列式不为零，所以方程组有唯一解，故引理得证.

□

2.2. Stone-Weierstrass 定理.

2.2.1. *Weierstrass* 定理：实形式.

定理 2.1 (Stone-Weierstrass 定理,实形式). 设 K 为紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为 $C(K,\mathbb{R})$ 的子代数，

(1) $\mathcal{A}$ 在 K 上可分点；

(2) 对任意 $x\in K$，存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq 0$.

(即引理2.2的条件)，那么 $\mathcal{A}$ 为稠密子代数.

证明. 如有必要，用 $\overline{A}$ 代替 A，可假设 A 是闭的. 然后我们需要证明 $A=C(K,\mathbb{R})$. 设 $f\in C(K,\mathbb{R})$ $\epsilon>0$.

对任意 $x,y\in K$，由引理2.2 ，存在函数 $h_{x,y}\in A$，使得 $h_{x,y}(x)=f(x)$，$h_{x,y}(y)=f(y)$. 令

$$U_{x,y}=\{z\in K: h_{x,y}(z)+\epsilon>f(z)\}.$$

显然 $U_{x,y}$ 是开集,并且 $x,y\in U_{x,y}$. 固定 x,那么集族 $\{U_{x,y}\}_{y\in K}$ 就是 K 的一个开覆盖. 由于 K 是紧的,可知存在有限个 $y_1,\cdots,y_n(x)\in K$，使得

$$K=U_{x,y_1}\cup\cdots\cup U_{x,y_{n(x)}}.$$

注意这里的 $n(x)$ 指 n 依赖于 x. 相应地，对应着有限个函数 $h_{x,y_1},\cdots,h_{x,y_{n(x)}}$，令 $h_x=\max\{h_{x,y_1},\cdots,h_{x,y_{n(x)}}\}$. 由引理 5.2.4 可知 $h_x\in A$. 另外，由 h_{x,y_i} 的选取还可知在 K 上，$f<h_x+\epsilon$ 及 $f(x)=h_x(x)$.

其次，令

$$V_x=\{z\in K: f(z)>h_x(z)-\epsilon\}.$$

该集合为开集并有 $x\in V_x$. 同样由 K 的紧性，可知存在有限个 $x_1,\cdots,x_m\in K$, 使得 $K=V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_m}$. 令 $h=\min\{h_{x_1},\cdots,h_{x_m}\}$. 仍由引理 5.2.4 可知 $h\in A$. 并且在 K 上，$f>h-\epsilon$ 且 $f<h+\epsilon$，即

$\|f-h\|_\infty < \epsilon$. 由 ϵ 的任意性，这意味着 $f \in \overline{A}$. 因我们已经假设 A 是闭的，故得 $f \in A$. 因 f 是任意的，因此 $A = C(K, \mathbb{R})$. □

注 2.1. 在使用时，上述条件中的 (2) 被 "$\mathcal{A}$ 包含恒等于 1 的函数" 代替，该函数就是代数 $\mathcal{A}$ 的单位元，因此上述定理有一个更好用的推论.

推论 2.1 (Stone-Weierstrass 定理,实形式). 设 K 为紧的 Hausdorff 空间，如果 $\mathcal{A}$ 为 $C(K, \mathbb{R})$ 在 K 上可分点的含幺子代数，那么 $\mathcal{A}$ 为稠密子代数.

推论 2.2 (Weierstrass 第一逼近定理). 设 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中紧子集，则限制在 K 上的关于变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的实系数多项式函数全体在 $C(K)$ 中稠密. 特别地，闭区间 $[a,b]$ 上全体实系数多项式函数全体在 $C([a,b])$ 中稠密.

事实上,这个定理的一元版本是可以被构造的,被称为 **Bernstein 多项式**，参见问题27.

2.2.2. *Weierstrass 定理：复形式.* 下面我们来介绍复形式的 Weierstrass 定理.

定理 2.2 (Stone-Weierstrass 定理,复形式). 设 K 为紧的 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为 $C(K, \mathbb{C})$ 的子代数，

(1) $\mathcal{A}$ 在 K 上可分点；

(2) 对任意 $x \in K$，存在 $f \in \mathcal{A}$ 使得 $f(x) \neq 0$.

(3) $f \in \mathcal{A}$ 蕴含 $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

那么 $\mathcal{A}$ 为稠密子代数.

证明. 令 $Re\mathcal{A} = \{\mathrm{Re} f : f \in \mathcal{A}\}$. 对任意 $f \in \mathcal{A}$, 由于 $\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{C})$ 的子代数并且是自伴的, 故有 $Ref = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in \mathcal{A}$ 且 $Imf = \mathrm{Re}(-if) \in Re\mathcal{A}$. 于是可得 $Re\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A} = \mathrm{Re}\mathcal{A} + iRe\mathcal{A} = \{f + ig : f, g \in Re\mathcal{A}\}$.

因 $Re\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, 故容易看到 $Re\mathcal{A}$ 是 $C(K, \mathbb{R})$ 的子代数. 并且 $Re\mathcal{A}$ 还满足定理2.1的其他条件：

- $Re\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的. 任取两个不同的元素 $x, y \in K$, 因 $\mathcal{A}$ 在 K 上是可分点的, 故存在 $f \in \mathcal{A}$, 满足 $f(x) \neq f(y)$. 从而 $Ref(x) \neq Ref(y)$ 或 $Imf(x) \neq Imf(y)$. 注意 $Imf \in Re\mathcal{A}$, 故结论成立.
- 对任意 $x \in K$, 存在 $\varphi \in Re\mathcal{A}$, 使得 $\varphi(x) \neq 0$. 这个结论由本定理中的条件 (2) 立即可得.

所以 $Re\mathcal{A}$ 在 $C(K, \mathbb{R})$ 中稠密. 那么 $\mathcal{A} = \mathrm{Re}\mathcal{A} + i\mathrm{Re}\mathcal{A}$ 就是 $C(K, \mathbb{C})$ 的稠密子集. □

推论 2.3. (1) 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中紧子集，则限制在 K 上关于变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的复系数多项式全体在 $\mathbb{C}(K, \mathbb{C})$ 中稠密.

(2) 设 K 为 $\mathbb{C}^n$ 中紧子集,则限制在 K 上关于变量 $(z_1, \cdots, z_n, \overline{z}_1, \cdots, \overline{z}_n)$ 的复系数多项式全体在 $\mathbb{C}(K, \mathbb{C})$ 中稠密.

注 2.2. 上述推论中的 (2) 的条件不可减弱为仅关于变量 $(z_1, \cdots, z_n)$ 的多项式. 此外，对任一 $\mathbb{C}$ 中区域 Ω 上的全纯函数可能不存在关于变量 z 的复系数多项式逼近，读者可以参考 Runge 定理，见 [**18**].

2.3. Weierstrass 定理的应用.

2.3.1. *在 Fourier 分析中的应用*. 我们在第3章应用 Hilbert 空间同构以及恒等元逼近的技术证明了空间 $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 的完备正交系为三角基 $\mathbf{e}(x)$，其中

$$\mathbf{e}(x) = \{\cdots, e^{-inx}, \cdots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \cdots, e^{inx}, \cdots\}$$

其中重要的一步是说明三角多项式函数空间 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 空间中的稠密性，它约化为连续函数空间 $C_{2\pi}$ 中的稠密性.

通过 Stone-Weierstrass 定理容易验证 $\mathcal{T}$ 在 $C_{2\pi}$ 中的稠密性，只要说明 $\mathcal{T}$ 为其稠密子代数即可，参见 [**32**].

引理 2.3 (Weierstrass 第二逼近定理). 三角多项式函数空间 $\mathcal{T}$ 在连续函数空间 $C_{2\pi}$ 中稠密.

练习 2.1. 利用定理2.2证明上述引理.

进而我们再次证明了:

- 三角多项式函数空间 $\mathcal{T}$ 在 $C_{2\pi}$ 和 $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ 中稠密.
- $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 中的完备正交系为 $\mathbf{e}(x)$.

此外,我们还能够证明 Fourier 分析中一个经典的结果,即 Riemann-Lebesgue 引理.

定理 2.3 (Riemann-Lebesgue 引理). 设 $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$,则存在唯一的 Fourier 级数展开. 换言之,Fourier 变换算子 $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z})$ 是一个单射.

注 2.3.

(1) 定理证明的第一步是说明 $\mathcal{F}$ 的像空间属于 $c_0(\mathbb{Z})$. 这是经典分析中的 Riemann-Lebesgue 引理,即若 $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$,则

$$\hat{f}(n) \to 0, \quad |n| \to \infty$$

这等价于

$$\lim_{|n|\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i|n|x} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 0$$

利用 Euler 恒等式可以翻译成实函数的语言,即

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx = 0$$

这一步的证明只要用到 $\mathcal{T}$ 的稠密性,将 f 替换为三角多项式函数并施以分部积分. 此外,这个过程暗示我们:Fourier 变换将函数的光滑性转化为 Fourier 级数的敛散性. 我们把前者称为**物理空间**中的指标,后者称为**频率空间**中的指标,见第10,参见 [**20, 19, 32**].

(2) 注意到 $\mathcal{F}$ 与空间的线性性,因此上述定理等价于说明当 $\mathcal{F}[f] = 0$ 时 (即 Fourier 展开为 0) 函数 $f \equiv 0$,参见 [**32**].

练习 2.2.

(1) 证明

$$\lim_{|n|\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i|n|x} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 0$$

其中 $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$.

(2) 证明定理2.3.

最后，一个自然的问题是：上述变换 $\mathcal{F}:\mathcal{L}^1_{2\pi}\to c_0(\mathbb{Z})$ 是否是一个满射？若成立我们可以将所有 $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ 中的函数转化为频率空间中的 Fourier 级数研究. 我们将在第6章中利用开映射定理的工具证明 $\mathcal{F}$ 不是满射.

习题五

¶ Ascoli 定理及其应用. 本段落意图给紧度量空间 (K,δ) 上的 Ascoli 定理的充分性一个简单证明. 设 (K,δ) 为紧度量空间, $(f_n)\subset C(K,E)$ 为等度连续的函数列，并且每点 $x\in K$ 的轨道 $\{f_n(x):n\geq 1\}$ 相对紧.

问题 25. (1) 证明 K 可分，即存在可数稠密子集 D.

(2) 使用对角线方法，证明 (f_n) 存在子列 $(f_{n_k})_{k\geq 1}$，使得对任意 $x\in D$，有 $(f_{n_k}(x))$ 收敛.

(3) 证明对任意 $x\in K$，$(f_{n_k}(x))_{k\geq 1}$ 是 Cauchy 列；并由此导出 $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ 在 $C(K,E)$ 中收敛.

问题 26. 本习题希望说明 $\mathbb{C}$ 中开区域 Ω 上全纯函数全体 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上的紧一致收敛拓扑不可被范数诱导.

(1) 证明对每一个紧子集 $K\subset\Omega$，

$$\{f\in\mathcal{H}(\Omega):\sup_{z\in K}|f|=||f||_{\infty,K}<1\}$$

是 $(\mathcal{H},\tau_{uc,K})$ 中的开集. 其中 $\tau_{uc,K}$ 表示 $C(\Omega)$ 上的紧一致收敛拓扑.

(2) 假设 $\tau_{uc,K}$ 可以被范数 $||-||$ 诱导，令 $\mathcal{B}:=\{f\in\mathcal{H}(\Omega):||f||<1\}$. 证明对每个紧子集 $K\subset\Omega$，有常数 $t>0$，使得

$$t\mathcal{B}\subset\left\{f\in\mathcal{H}(\Omega):\sup_{z\in K}|f(z)|<1\right\}$$

并证明 $\mathcal{B}$ 关于 $\tau_{uc,K}$ 是相对紧的.

(3) 证明 $\tau_{uc,K}$ 不可被 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上任何范数诱导.

¶ Bernstein 定理.

问题 27. 本习题的目的是证明 **Bernstein 定理**：令 $f\in C([0,1],\mathbb{K})$，并设

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$

则 B_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 f.

(1) 首先导出对任一正整数 n, 有公式

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad 和 \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k k^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx+n(n-1)x.$$

并由此证明

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

(2) 对任意 $\epsilon > 0$，选择适当的 $\delta > 0$, 使得

$$x, y \in [0,1], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

对任意固定的 $x \in [0,1]$，令 $I = \{k : |x - \frac{k}{n}| < \delta\}$ 及 $J = \{k : |x - \frac{k}{n}| > \delta\}$. 证明

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| <& \epsilon \sum_{k \in I} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &+ \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k \in J} \mathrm{C}_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

从而导出

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta} \frac{x(1-x)}{n}.$$

(3) 得出结论

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0.$$

问题 28. 对任意 $x \in [0,1]$, $\mathrm{f}_n(x) = x^n$. 在 $[0,\ 1]$ 上的哪些点处, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 等度连续?

问题 29. 考虑函数序列 (f_n), 这里 $f_n(t) = \sin\left(\sqrt{t + 4(n\pi)^2}\right), t \in [0, \infty)$.

(a) 证明 (f_n) 等度连续并且逐点收敛到 0 函数.

(b) $C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ 表示 $[0,\infty)$ 上所有有界连续实函数构成的空间, 并赋予范数

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\geqslant 0} |f(t)|.$$

(f_n) 在 $C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ 中是否相对紧?

CHAPTER 6

Baire 纲集理论及其应用

旨趣. 历史上早期古典分析与函数论的研究中，大部分的视角限制在连续函数 (一般地，有限个间断点的函数) 上，并以此建立极限与连续性的严格刻画 (Weierstrass、Cauchy 等人的工作)、求导与微分以及积分理论 (Riemann 等人的工作). 20 世纪初 Lebesgue 建立的测度论体系使得可以研究更复杂的函数类型和积分，这是实变函数与实分析的范畴，参见 [**3, 16**]. 在测度论创立之前，Baire 曾建立了基于实数 $\mathbb{R}$ 完备性的纲集理论，1914 年 Hausdorff 观察到其中的完备性条件将其推广到度量空间，事实上更一般的空间例如 LCH 空间也满足要求，参见 [**17**]. 我们将在第1节中证明纲集定理，并应用其证明古典分析中的两个事实：即第一纲函数的连续点与连续但不可导病态函数的普遍性. 此外，连同 Baire 定理，Banach-Steinhaus 定理和开映射定理、闭图像定理并为泛函分析中典型的三大定理. 其中 Banach-Steinhaus 定理又称一致有界性原理，刻画了 Banach 空间算子族逐点有界与一致有界性的联系，我们将用其解释 Fourier 级数不收敛的算子原因；最

后，利用开映射定理说明 Riemann-Lebesgue 引理的反面不成立，即

$$\mathcal{F}:\mathcal{L}^2_{2\pi}\to c_0(\mathbb{Z})$$

不是满射.

1. Baire 纲定理与 Baire 空间

1.1. Baire 纲定理.

1.1.1. *完备空间的 Baire 定理.* 熟知实分析中的 Baire 纲定理，参见 [**33, 24, 30**]，我们叙述如下：

定理 1.1 (Baire，1889). (1) $\mathbb{R}$ 中一列稠密的开集列 $(G_n)_{n\geq 1}$ 构成的 G_δ 集 $G:=\bigcap_{n\geq 1}G_n$ 也稠密.

(2) $\mathbb{R}$ 中一列无内点的闭集列 $(F_n)_{n\geq 1}$ 构成的 F_σ 集 $F:=\bigcup_{n\geq 1}F_n$ 也无内点.

基于其我们可以证明一系列关于实数的结果：

练习 1.1. 利用定理1.1证明：

(1) $\mathbb{R}$ 是不可数集.

(2) $\mathbb{Q}$ 是 F_σ 集但不是 G_δ 集.

定义 1.1. 设 X 为拓扑空间，$E\subset X$

(1) 称 E 是 **Baire 第一纲集** (或称**贫集**)，如果 $\mathrm{Int}\left(\overline{E}\right)=\emptyset$；

(2) 称 E 是 **Baire 第二纲集**，如果 E 不是第一纲集；

(3) 称 E 是**剩余集**，如果 E^c 是第一纲集.

Baire 最早证明定理1.1利用了 $\mathbb{R}$ 的完备性，1914 年 Hausdorff 将其推广到一般完备度量空间上.

引理 1.1 (Hausdorff，1914). 设 X 为完备度量空间，则 X 为第二纲集.

证明. 反证法. 假设 X 为第一纲集，不妨设

$$X=\bigcup_{n\geq 1}F_n$$

其中 F_n 为闭贫集. 下面说明存在 $x\in X$ 使得 $x\notin\bigcup_{n\geq 1}F_n$. 下面利用归纳法构造一列闭球套：

(1) 由于 F_1 为闭贫集，存在闭球 $B_1 := \overline{B(x_1, r_1)}$ 使得 $B_1 \subset F_1^c$，其中 $r_1 < 1$. (这是因为度量空间 X 是 T_4 的，参见 [**26**].)

(2) 假设闭球 $B_n = \overline{B(x_n, r_n)} \subset B_{n-1} \cap F_n^c$ 已定义，其中 $r_n < 1/n$，下面构造 B_{n+1}：

由 F_{n+1} 为闭贫集，同样可取 $B_{n+1} := \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B_n \cap F_{n+1}^c$，并且 $r_{n+1} < 1/(n+1)$.

因此存在一列闭球套

- $B_1 \supset \cdots \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(B_n) = 0$

由定理1.4可知 $\bigcap_{n\geq 1} B_n = \{x\}$，其中 $x \in X$ 但 $x \notin F_n$, $\forall n \geq 1$，因此 $x \notin \bigcup_{n\geq 1} F_n$. □

1.1.2. *Baire 空间*. 上述证明中找闭球套的方法可以推广到一般的局部紧的 Hausdorff 空间 (即 LCH 空间)，参见 [**17, 32**]，利用其性质可同样取出一列**穷竭**紧球套 $(B_n)_{n\geq 1}$，满足

$$B_1 \supset \cdots \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$$

并且我们断言

$$\bigcap_{n\geq 1} B_n \neq \emptyset$$

若不然，则 $B_1 \subset \bigcup_{n\geq 2} B_n^c$. 注意到 X 为 Hausdorff 空间，进而每个紧球 B_n 是闭球，于是 B_n^c 为开集，上式中右侧为一列开覆盖. 利用 B_1 的紧性可知存在有限子覆盖，但结合 (B_n) 穷竭的性质，这是不可能的.

因此我们证明了：

引理 1.2. LCH 空间一定是第二纲集.

事实上，上式引理的证明方法立即适用于空间的 G_δ 集与 F_σ 集，我们有

定理 1.2 (Baire, Hausdorff). 若 X 为完备度量空间或 LCH 空间，则

(1) X 中一列稠密的开集列 $(G_n)_{n\geq 1}$ 构成的 G_δ 集 $G := \bigcap_{n\geq 1} G_n$ 也稠密.

(2) X 中一列无内点的闭集列 $(F_n)_{n\geq 1}$ 构成的 F_σ 集 $F := \bigcup_{n\geq 1} F_n$ 也无内点.

这个定理被称为一般形式的 **Baire 定理**, 也立即覆盖定理1.1. 下面我们把上述两条关于 G_δ 集与 F_σ 集的结果抽象出来定义一般的空间.

定义 1.2. 称拓扑空间 X 为 **Baire 空间**, 如果

(1) X 中一列稠密的开集列 $(G_n)_{n\geq 1}$ 构成的 G_δ 集 $G := \bigcap_{n\geq 1} G_n$ 也稠密.

(2) X 中一列无内点的闭集列 $(F_n)_{n\geq 1}$ 构成的 F_σ 集 $F := \bigcup_{n\geq 1} F_n$ 也无内点.

由此显然完备度量空间与 LCH 空间是 Baire 空间. 并且在 Baire 空间中, 可列个剩余集的交是剩余集, 可列个贫集的并是贫集.

练习 1.2. 利用定理1.2说明无限维的 Banach 空间一定是不可数维的.

注 1.1. 熟悉测度论的读者可能会把 Baire 第一纲集与零测集等同, 必须要指出的是: 在 $[0,1]$ 区间上, 存在正测度的第一纲集, 也存在零测度的稠密子集, 参见 [**19**]. 事实上, Baire 的纲集理论出现于 Lebesgue 的测度论之前, 是一个纯粹拓扑的概念.

1.2. Baire 纲定理的若干应用. 下面我们介绍 Baire 定理的一些应用, 在此之前需引入一个基本的工具用于讨论 Baire 空间中的开子集与闭集列.

引理 1.3. 设 X 为 Baire 空间, 则

(1) X 中任一开子集 E 是 Baire 空间;

(2) $(F_n)_{n\geq 1}$ 为 X 中闭集列, 令 $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$, 则 $\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Int}(F_n)$ 在 E 中稠密.

证明. (1) 设 $(E_n)_{n\geq 1}$ 为 E 中一列稠密开集, 于是

$$\left(E_n \cup \left(\overline{E}\right)^c\right)_{n\geq 1}$$

为 X 中一列稠密开集. 由 X 为 Baire 空间,

$$G := \bigcap_{n\geq 1}\left(E_n \cup \left(\overline{E}\right)^c\right)$$

稠密. 又由于

$$G = \left(\bigcap_{n\geq 1} E_n\right) \cup \left(\bigcap_{n\geq 1} \left(\overline{E}\right)^c\right) = \left(\bigcap_{n\geq 1} E_n\right) \cup \left(\overline{E}\right)^c$$

因此 $\bigcap_{n\geq 1} E_n$ 为 E 的稠密子集.

(2) 任取 E 中非空开集 O, 注意到

$$O = O\cap E = O \cap \left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) = \bigcup_{n\geq 1} (O\cap F_n)$$

其中 $(O\cap F_n)_{n\geq 1}$ 为 O 中闭集列. 由 (1) 可知 O 为 Baire 空间, 于是存在 $N \geq 1$ 使得 $\mathrm{Int}(O\cap F_N) \neq \emptyset$, 又由于 $\mathrm{Int}(O\cap F_N) \subset \mathrm{Int})(E)$, 因此 $O \cap \mathrm{Int}(F_N) \neq \emptyset$. 因而 $\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Int}(F_n)$ 在 E 中稠密.

□

1.2.1. 连续函数列的极限函数. 第5章中研究连续函数空间 $C(K,\mathbb{R})$. 我们已经知道连续函数的逐点收敛极限不一定连续, 例如 x^n.

定义 1.3. 称映射是**第一纲的**, 如果其为一列连续映射的逐点收敛极限.

因此分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$$

是第一纲的.

注 1.2. 数学分析中我们知道 **Dirichlet 函数**

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续，但为一列第一纲函数的逐点收敛极限并且本身不是第一纲的 (见练习1.3). 这说明一列第一纲函数逐点收敛的极限函数不一定是一列连续函数的极限.

第5章中的做法是试图加强收敛性，即加上一个等度连续的条件使得函数列是一致收敛的，从而得到连续的极限函数. 事实上，实分析中的 Egorov 定理可以在损失一个可控测度意义下将逐点收敛提升为一致收敛，以及 Lusin 定理同样得到可测函数限制意义下的连续函数，参见 [**30, 33, 3, 19**]. 结合注1.1，受测度论的启发，我们不难观察到连续函数列逐点收敛的极限函数的“大部分点”是连续的. 下面给出这里“大部分”的严格刻画.

定理 1.3. 设 X 为 Baire 空间，(Y,d) 为度量空间，$(f_n)_{n\geq 1}$ 为一列从 X 到 Y 的连续函数并且逐点收敛于 f，则 f 的连续点集

$$\operatorname{cont}(f) := \{x \in X : f \text{ 在 } x \text{ 处连续}\}$$

是 X 中稠密的 G_δ 集. 换言之，第一纲映射的连续点集是稠密的 G_δ 集.

引理 1.4. 设 X 为 Hausdorff 空间，(Y,d) 为度量空间，任意 $f: X \to Y$ 的连续点集 $\operatorname{cont}(f)$ 必为 G_δ 集.

证明. 回忆映射的**振幅**，即

$$\operatorname{osc}(f)(x) := \inf_{V\in\mathcal{N}(x)} \sup_{y,z\in V} d(f(y), f(z))$$

其中 $\mathcal{N}(x)$ 为 x 的邻域系. 显然 f 在 x 处连续当且仅当 $\operatorname{osc}(f)(x) = 0$. 进而

$$\operatorname{cont}(f) = \bigcap_{n\geq 1}\{x \in X : 0 < \operatorname{osc}(f)(x) < 1/n\}$$

说明 $\operatorname{cont}(f)$ 为 G_δ 集. □

定理1.3的证明. 由引理1.4, 只要证 $\mathrm{cont}(f)$ 稠密. 对任意 $N, r \geq 1$, 定义

$$\begin{aligned} F_N^r &:= \left\{ x \in X : d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{r},\ \forall m, n \geq N \right\} \\ &= \bigcap_{m,n \geq N} \left\{ x \in X : d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{1}{r} \right\} \end{aligned}$$

由 f_n 连续，进而 F_N^r 为闭集. 又由于 f 为 f_n 的极限函数，于是 $X = \bigcup_{N\geq 1} F_N^r$. 令

$$G^r := \bigcup_{N \geq 1} \mathrm{Int}(F_N^r)$$

由引理1.3的 (2) 可知每个 G^r 稠密开子集. 又由于 X 为 Baire 空间, 进而 $G = \bigcap_{r\geq 1} G^r$ 为稠密的 G_δ 集.

最后，我们断言 $G \subset \mathrm{cont}(f)$. 事实上，对任意 $x \in G$，即对任意 $r \geq 1$ 有 $x \in G^r$. 进而存在 $N \geq 1$ 使得 $x \in \mathrm{Int}(F_N^r)$，这说明

$$d(f_m(y), f_n(y)) \leq \frac{1}{r}, \quad \forall m, n \geq N,\ y \in \mathrm{Int}(F_N^r)$$

令 $n \to \infty$，有 $d(f_m(y), f(y)) \leq 1/r$. 另一方面，由 f_N 连续，存在 $V \in \mathcal{N}(x)$ 使得

$$d(f_N(x), f_N(x)) \leq \frac{1}{r}, \quad \forall y \in V$$

令 $U = V \cap \mathrm{Int}(F_N^r)$，于是 $U \subset V$ 并且

$$\begin{aligned} d(f(y), f(x)) &\leq d(f(y), f_N(y)) + d(f_N(y), f_N(x)) \\ &\quad + d(f_N(x), f(x)) \leq \frac{3}{r}, \quad \forall y \in U \end{aligned}$$

这说明 f 在 x 处连续. 因此 $G \subset \mathrm{cont}(f)$，进而稠密. □

练习 1.3. (1) 利用练习1.1的 (2) 和引理1.4, 证明不存在函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{cont}(f) = \mathbb{Q}$

(2) 证明 Riemann 函数 $R(x)$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

的连续点集 $\mathrm{cont}R = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$\mathrm{cont}(D) = \emptyset$$

(3) 证明 Dirichlet 函数 $D(x)$ 不是第一纲的，但存在一列第一纲函数收敛到 $D(x)$.

1.2.2. *处处不可导的连续函数*. 数学分析中我们构造过一大类处处不可导的连续函数，参见 [**15**]，我们有典型的级数构造

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

其中 $\varphi(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$ 是以 2 为周期的函数.

练习 1.4. 证明上述函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续但处处不可导.

[**20**] 中利用 Fourier 级数构造了一类处处不可导的连续函数, [**19**] 中列举了一类 Hausdorff 维数介于 1 到 2 之间的“曲线”类，它们作为图像的函数是连续但处处不可导的，例如著名的 Koch 雪花. 这类函数往往称为**病态函数**，参见 [**19, 15, 30**]，但我们指出这类函数以在连续函数空间中出现的概率来看，不应该被冠以“病态”一词，事实上这类函数占据了连续函数的“绝大部分”，[**21**] 中证明了这个结果，我们简要叙述之.

定理 1.4. $C([0,1])$ 上的几乎处处不可导函数子集是剩余集.

证明的想法是说明如下集合

$$\mathcal{D} := \{f : C([0,1]) : \text{函数 } f \text{ 至少有一点可导}\}$$

不难验证

$$\mathcal{D} = \bigcup_{N \geq 1} E_N$$

其中

$$E_N := \{f : C([0,1]) : \exists x_0 \in [0,1], \ |f(x) - f(x_0)| \leq N|x - x_0|, \ \forall x \in [0,1]\}$$

注意到 $(C([0,1]), \|-\|_\infty)$ 完备，利用 Baire 定理 (即定理1.2)，进而只要说明每个 E_N 是贫集即可.

证明，SKETCH. 上述想法归结为证明如下两点：

(1) 每个 E_N 为闭集；

(2) 每个 $\mathrm{Ing}(E_N) = \emptyset$.

下面叙述 (1)、(2) 的证明框架，细节留给读者补充，参见 [**21**]. 为此，对任意 $N \geq 1$.

(1) 取一列 $(f_n)_{n\geq 1} \subset E_N$ 使得 f_n 一致收敛于 f，下面说明 $f \in E_N$. 将集合 E_N 定义中的不等式

$$|f(x) - f(x_0)| \leq N|x - x_0|$$

中的 f 替换为 f_n，x_0 替换为 x_0^n. 进而由 $(x_0^n)_{n\geq 1} \subset [0,1]$ 推出存在子列 $(x_0^{n_k})_{k\geq 1}$ 收敛于一点，不妨记为 x_0. 作如下估计：

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| \leq\ & |f(x) - f_{n_k}(x)| \\ & + |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_0)| + |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)|\end{aligned}$$

(f_n) 一致收敛蕴含上式中红色项充分小. 下面估计蓝色项：

$$\begin{aligned}|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_0)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_0^{n_k})| + |f_{n_k}(x_0^{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| \\ &\leq N|x - x_0^{n_k}| + N|x_0^{n_k} - x_0| \\ &\leq N|x - x_0| + 2N|x_0^{n_k} - x_0|\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq N|x - x_0| \\ &\quad + |f(x) - f_{n_k}(x)| + 2N|x_0^{n_k} - x_0| + |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)|\end{aligned}$$

这说明 $f \in E_N$.

(2) 要证明 (2), 我们需要一个折线函数 (zig-zag) 引理, 参见 [**21**], 留作习题，即对任意 $M > 0$，折线函数空间 $\mathcal{Z}_M$ 在 $C([0,1])$ 中稠密. 其中

$$\mathcal{Z}_M := \{f \in C([0,1]) : f \text{ 为分段线性函数且每段的斜率的绝对值不小于 } M\}$$

任取 $f \in E_N, \epsilon > 0$，由上述引理，存在 $g \in \mathcal{Z}_M$ 使得

$$||f - g||_\infty < \epsilon$$

注意到 $g \notin E_N$，进而以 f 为中心的 ϵ-球不在 E_N 中，因此内部为空集.

$\square$

练习 1.5. (1) 完善上述 (1) 的证明.
(2) 验证上述证明中的折线函数引理.

2. Banach-Steinhaus 定理

本节和下一节中，若不加说明，我们默认 X,Y 为域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间.

2.1. Banach-Steinhaus 定理.

定理 2.1 (Banach-Steinhaus 定理). 设 X 为 Banach 空间，$(u_i)_{i\in I}$ 为一族 X 到 Y 的有限线性算子 (即 $(u_i)\subset\mathcal{B}(X,Y)$). 那么

(1) 若对任意 $x\in X$，$\sup_{i\in I}\sup_{x\in X}||u_i(x)||<\infty$，则

$$\sup_{i\in I}||u_i||<\infty$$

(2) 若 $\sup_{i\in I}||u_i||=\infty$，则

$$G:=\{x\in X:\sup_{i\in I}u_i(x)=\infty\}$$

为 X 中稠密的 G_δ 集.

注 2.1. (1) 上述定理中的 (1) 说明在 X 上逐点有界的连续线性算子族是一致有界的，因此 (1) 的叙述也被称为**一致有界性原理** (Uniform bounded principle). 事实上

$$||u_i(x)-u_i(y)||\leq||x-y||,\quad\forall x,y\in X,\ i\in I$$

这其实是等度连续 (见定义1.1) 的概念，也就是说，一致有界性原理说明：逐点有界的算子族是等度连续的. 进一步可以将其推广到一般的拓扑向量空间上，见问题35，参见 [**17**].

(2) 第二条结论是 (1) 的反面，被它的发现者命名为**奇点聚集原理** (Principle of concentration of singularity)，即若算子族在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中无界，那么 X 中大部分点 x 使得 $(u_i(x))_{i\in I}$ 在 Y 中无界.

证明. 令

$$M(x):=\sup_{i\in I}||u_i(x)||$$

(1) 记

$$F_n:=\{x\in X:M(x)\leq n\}=\bigcap_{i\in I}\{x\in X:||u_i(x)||\leq n\}$$

由 $\{x \in X : ||u_i(x)|| \leq n\}$ 为闭集，因此 F_n 为闭集. 又由于 $M(x) < \infty$, $\forall x \in X$，因此

$$X = \bigcup_{i \in I} F_n$$

注意到 X 为 Baire 空间，进而 $\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Int}(F_n)$ 在 X 内稠密 (回忆引理1.3的 (2)). 这说明存在 $N \geq 1$ 使得 $\mathrm{Int}(F_N) \neq \emptyset$，即存在开球 $B(x_0, r) \subset \mathrm{Int}(F_N)$，于是

$$M(x) \leq N, \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

这等价于

$$||u_i(x + x_0)|| \leq N, \quad \forall x \in B(O, r),\ i \in I$$

由线性性，

$$||u_i(x)|| \leq ||u_i(x + x_0)|| + ||u_i(x_0)|| \leq N + M(x_0) < \infty$$

因此 $\sup_{i\in I} ||u_i|| < \infty$.

(2) 记

$$G = \{x \in X : \sup_{i\in I} u_i(x) = \infty\} =: \bigcap_{n\geq 1} G_n$$

注意到 $G_n = X - F_n$，其中 F_n 为 (1) 中的闭集，因此 G 为 G_δ 集. 假设存在 G_N 不稠密，即 $\mathrm{Int}(F_N) = \emptyset$. 利用 (1) 的证明得到

$$\sup_{i\in I} ||u_i|| < \infty$$

与条件矛盾！进而所有 G_n 都稠密，由 X 为 Baire 空间，因此 G 稠密.

□

推论 2.1. 设 X 为 Banach 空间，$(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ 满足 $u_n \to u$ 于是

$$u \in \mathcal{B}(X, Y)$$

且

$$||u|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||u_n||$$

证明. 对任意 $x \in X$，由 $(u_n(x))$ 收敛可知 $(u_n(x))$ 有界，由定理2.1可知 $\sup_{n\geq 1} ||u_n|| < \infty$. 令

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x), \quad \forall x \in X$$

显然 u 线性，再验证 u 有界. 注意到

$$||u(x)|| \leq \lim_{n\to\infty} ||u_n(x)|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||u_n|| \cdot ||x||$$

这说明 u 有界，并且

$$||u|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||u_n||$$

□

练习 2.1. 验证上述证明中的 u 是线性算子.

推论 2.2 (双线性映射). 设 X, Y 为 Banach 空间，$\mathbb{Z}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间. 设

$$B : X \times Y \to Z$$

为双线性映射. 若两个分量映射

$$B(x, -) : Y \to Z, \quad \forall x \in X$$

$$B(-, y) : X \to Z, \quad \forall y \in Y$$

连续, 则 B 连续, 其中 $X \times Y$ 取乘积范数 (诱导的拓扑), 即 $||(x, y)|| := \max\{||x||, ||y||\}$.

证明. 对任意 $(x_0, y_0) \in X \times Y$，任取趋向 x_0, y_0 的序列 $(x_n), (y_n)$，由双线性性

$$\begin{aligned} ||B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0)|| &\leq ||B(x_n, y_n) - B(x_n, y_0)|| + ||B(x_n, y_0) - B(x_0, y_0)|| \\ &= ||B(x_n, y_n - y_0)|| + ||B(x_n - x_0, y_0)|| \end{aligned}$$

其中上式的第二项趋于 0, 注意到算子列 $(B(x_n, -\!-y_0))_{n\geq 1}$ 逐点有界, 由定理2.1可知其等度连续 (参见注2.1)，进而说明 $||B(x_n, y_n - y_0)|| \to 0$. □

练习 2.2. 完善上式证明中 $||B(x_n, y_n - y_0)|| \to 0$ 的证明.

一个立即的推论是

推论 2.3. 设 X, Y 为 Banach 空间，$\mathbb{Z}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间. 设 $B: X \times Y \to Z$ 为双线性映射. 则以下说法互相等价:

(1) $B \in C(X \times Y, Z)$;

(2) B 在 $X \times Y$ 上某点连续;

(3) B 在 $X \times Y$ 的原点 O 连续;

(4) B 有界，即存在 $C \geq 0$ 使得

$$||B(x,y)|| \leq C||x|| \cdot ||y||, \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

2.2. Banach-Steinhaus 定理的应用.

2.2.1. *发散 Fourier 级数.* 我们基于定理2.1的 (2)，即奇点聚集原理，说明空间 $C_{2\pi}$(见定义4.2) 中至少一点处 Fourier 级数不收敛的函数是占据“绝大多数”的. 事实上，[**20**] 中基于 Fourier 级数的对称性构造了在一点不收敛的 Fourier 级数，即“锯齿”函数的展开

$$\sum_{(0\neq)n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{n}$$

定理 2.2.

$$G := \left\{ f \in C_{2\pi} : \sup_{n\in\mathbb{Z}} |S_n(f)(0)| = \infty \right\}$$

为 $C_{2\pi}$ 中稠密的 G_δ 集.

证明. 对任意 $n \geq 1$，我们定义如下映射

$$u_n : C_{2\pi} \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto S_n(f)(0)$$

断言 $u_n \in C_{2\pi}^*$. 首先 u_n 的线性性是显然的. 下面验证 u_n 是有界的. 注意到

$$||u_n(f)|| \leq ||f||_\infty \cdot ||D_n||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}}$$

即可，见定义4.3，这说明 $||u_n|| \leq ||D_n||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}}$. 事实上

$$||u_n|| = ||D_n||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}}$$

我们来证明反向不等式，参见 [**21**]. 为此，只要找到 $C_{2\pi}$ 中一列函数 (f_k) 使得

$$||f_k||_\infty \leq 1, \quad u_n(f_k) \to D_n,\ K \to \infty$$

即可. 注意到 $\mathrm{sgn}D_n$ 满足

$$||\mathrm{sgn}D_n||_\infty \le 1, \quad ||D_n||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sgn}D_n(-x)\cdot D_n(x)\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$$

并且显然存在一列函数 $(f_k) \subset C_{2\pi}$ 满足

$$||f_k||_\infty \le 1, \quad ||f_k - g||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}},\ K \to \infty$$

因此反向不等式成立.

最后，估计 $||D_n||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}}$，参见 [**20, 21**]:

$$\begin{aligned}
||D_n||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}} &= 2\int_0^\pi \frac{|\sin(n+1/2)x|}{\sin(1/2)x}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \\
&\ge 4\int_0^\pi \frac{|\sin(n+1/2)x|}{x}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \\
&= 4\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \\
&\ge 4\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin x\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \\
&\ge \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

这说明

$$||u_n|| \ge \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1)$$

其中 $O(1)$ 表示有界量. 因此 $\sup_{n\ge 1}||u_n|| = \infty$，由定理2.1可知 G 为稠密的 G_δ 集. $\square$

3. 开映射定理与闭图像定理

3.1. 开映射定理. 首先我们给出 Banach 空间间开映射的定义, 一般的定义可以参见 [**26, 12**].

定义 3.1. 设 X, Y 为 Banach 空间, 称 $u \in \mathcal{B}(X, Y)$ 为**开映射**, 如果对 X 中任一开集 O, $u(O)$ 为 Y 中开集.

引理 3.1 (重要引理). 设 X, Y 为 Banach 空间, $u \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若 $u(X)$ 不是 Y 中贫集, 那么存在 $r > 0$, 使得

$$rB_Y \subset u(B_X)$$

其中 B_X, B_Y 分别为 X, Y 中单位开球.

注 3.1. 引理中的结论立即蕴含 u 为满射, 事实上,

$$\begin{aligned} Y = \bigcup_{n\geq 1} nB_Y &\subset \bigcup_{n\geq 1} \frac{n}{r} u(B_X) \\ &= u\left(\bigcup_{n\geq 1} \frac{n}{r} B_X\right) = u(X) \end{aligned}$$

证明. 我们分以下三步证明.

Step 1 注意到 $X = \bigcup_{n\geq 1} nB_X$, 于是

$$u(X) = \bigcup_{n\geq 1} u(nB_X) = \bigcup_{n\geq 1} \overline{u(nB_X)}$$

由于 $u(X)$ 不是贫集, 因此 $\mathrm{Int}\bigcup_{n\geq 1} \overline{u(nB_X)} \neq \emptyset$. 又由于 Y 为 Baire 空间, 进而存在 $N \geq 1$, 使得 $\mathrm{Int}\overline{u(NB_X)} \neq \emptyset$. 进而存在 $y_0 \in Y, \eta > 0$ 使得

$$y_0 + \eta B_Y \subset \overline{u(NB_X)}$$

Step 2 由于 u 线性, 于是

$$\begin{aligned} \eta B_X &\subset \overline{u(NB_X)} - y_0 \\ &\subset \overline{u(NB_X)} - y_0 - \overline{u(NB_X)} \\ &\subset \overline{u(2NB_X)} \end{aligned}$$

进而

$$B_Y \subset \overline{u(cB_X)}, \quad c = \frac{2N}{\eta}$$

这说明对任意 $y \in B_Y$，存在 $x_0 \in cB_X$ 使得

$$||y - u(x_0)|| < \frac{1}{2}$$

Step 3 我们令 $y_1 = 2(y - u(x_0))$，于是 $||y_1|| < 1$，即 $y_1 \in B_Y$，进而又存在 $x_1 \in cB_X$，使得 $||y_1 - u(x_1)|| < \frac{1}{2}$. 再令 $y_2 = 2(y_1 - u(x_1))$, 显然 $y_2 \in B_y$ 且存在 $x_2 \in cB_X$ 使得 $||y_2 - u(x_2)|| < \frac{1}{2}$. 以此类推，得到一列 (x_n, y_n) 满足

$$||y_n - u(x_n)|| < \frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}
y &= u(x_0) + \frac{1}{2}y_1 \\
&= u(x_0) + \frac{1}{2}(u(x_1) + y_2) \\
&= u(x_0) + \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{4}(u(x_2) + y_3) \\
&= \cdots \\
&= u\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}y_{n+1}
\end{aligned}$$

注意到级数 $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{2^k}$ 绝对收敛，由于 X 完备，定理1.1蕴含级数收敛，不妨收敛于 $x(\in X)$，并且满足

$$||x|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}||x_n|| < 2c$$

即 $x \in 2cB_X$. 此时我们令 y 的表达式中 $n \to \infty$ 可得 $y = u(x)$.

因此 $B_Y \subset u(2cB_X)$，即 $rB_Y \subset u(B_X)$，其中 $r = 1/(2c)$.

$\square$

定理 3.1 (开映射定理). 在引理3.1的设定下，u 为开映射.

证明. 任取 X 中开集 U，对任意 $y_0 \in u(U)$，存在 $x_0 \in X$ 使得 $y_0 = u(x_0)$. 不妨 $x_0 = y_0 = O$. 由于 U 为开集，存在 $\epsilon > 0$，使得 $\epsilon B_X \subset U$. 由引理3.1可知存在 $r > 0$，使得

$$\epsilon r B_Y \subset u(\epsilon B_X) \subset u(U)$$

这说明 $u(U)$ 为开集，进而 u 为开映射. □

映射是开映射的好处是说明若存在逆映射，那么逆映射一定是连续的. 以下推论是常用的.

推论 3.1. 设 X, Y 为 Banach 空间，$u \in \mathcal{B}(X, Y)$，若 u 为双射，则 u 是一个同胚；更进一步，存在常数 $c, C > 0$，使得

$$c||x||_X \leq ||u(x)||_Y \leq C||x||_X$$

换言之，u 为 Banach 空间间的同构映射.

3.2. 闭图像定理. 与开映射相对的是闭图像定理.

定理 3.2 (闭图像定理). 设 X, Y 为 Banach 空间，$u : X \to Y$ 为线性映射，那么 u 连续当且仅当 u 的图像

$$\Gamma(u) := \{(x, u(x)) \in X \times Y : \forall x \in X\}$$

为 $X \times Y$ 中闭集[1].

证明. 必要性是显然的，留作习题. 下证充分性.

容易验证 $X \times Y$ 完备且 $\Gamma(u)$ 为 $X \times Y$ 的向量子空间，于是 $\Gamma(u)$ 完备. 定义映射

$$\Phi : \Gamma(u) \to X, \quad (x, u(x)) \mapsto x$$

显然满足 $\Phi \in \mathcal{B}(\Gamma(u), X)$，$||\Phi|| \leq 1$ 且为双射. 由定理3.1可知 Φ^{-1} 为连续线性映射，进而对任意 $x \in X$，有

$$||u(x)|| \leq ||\Phi^{-1}(x)|| \leq ||\Phi^{-1}|| \cdot ||x||$$

因此 u 连续. □

练习 3.1. (1) 证明上述定理的必要性.

[1]乘积拓扑见推论2.2中的说明.

(2) 验证上述定理证明中 $X\times Y$ 完备且 $\Gamma(u)$ 为 $X\times Y$ 为 $X\times Y$ 的向量子空间.

注 3.2. 开映射定理与闭图像定理可以推广到一般的 F-空间上 (见问题35)，见问题36.

3.3. 开映射定理的应用.

3.3.1. *开映射定理在 Fourier 级数理论中的应用.* 我们在第3章中说明了 $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ 中的完备幺正系为三角基 $\mathbf{e}(x)$(见定义4.2). 以及第5章中证明了对每个 $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ 中的函数 f 存在唯一的 Fourier 级数展开，并且利用已知的结果 Riemann-Lebesgue 引理 (见定理2.3) 说明这是从 $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ 到 $c_0(\mathbb{Z})$ 的单射. 一个自然的问题是，我们能否建立 $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ 到 $c_0(\mathbb{Z})$ 的双射，进而直接同构两个空间？这个期望的分析学含义是明显的，即对任一在无穷远处消失的序列 $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，即

$$\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$$

是否一定有某个 $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ 函数使得这个序列为其 Fourier 系数. 下面我们利用开映射定理的工具说明这是不可能的.

定理 3.3. Fourier 变换 (见定义4.3)$\mathcal{F}:\mathcal{L}^1_{2\pi}\to c_0(\mathbb{Z})$ 不是满射.

证明. 反证法. 若 $\mathcal{F}$ 为满射，进而为双射，由定理3.1(事实上由推论3.1)，$\mathcal{F}$ 为同构. 即存在常数 $c>0$，使得

$$||f||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}} \le c||\mathcal{F}[f]||_\infty = c\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|$$

取 $f=D_n$，即 Dirichlet 核函数 (见定义4.3)，说明 $||D||_{\mathcal{L}^1_{2\pi}}\le c$，这是不可能的. □

习题六

问题 30. 证明: 局部紧的 Hausdorf 空间是 Baire 空间

问题 31. 考虑空间 $E=C([0,1],\mathbb{R})$，其上赋予一致范数 $\|\cdot\|_\infty$。设 A 是 E 中无处可导的函数构成的子集，并记 $B=E\setminus A$。对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，令

$$F_n=\{f\in E:\exists x\in[0,1]\text{使得}\,\forall y\in[0,1],|f(x)-f(y)|\le n|x-y|\}.$$

(a) 证明：$B\subset\bigcup_{n\geq 1}F_n$。

(b) 证明：F_n 是闭集。

(c) 设 $f\in F_n, r>0$。

(i) 解释为什么存在一个多项式 P，使得

$$\|f-P\|_\infty<\frac{r}{2}.$$

(ii) 设 $M=\|P'\|_\infty$，并选择整数 N 使得 $rN\geq 2(M+n+1)$。定义周期为 $\frac{1}{N}$ 的函数 g 如下：g 在 $[0,\frac{1}{2N}]$ 和 $[\frac{1}{2N},\frac{1}{N}]$ 上是线性函数，且

$$g(0)=g\left(\frac{1}{N}\right)=0,\ g\left(\frac{1}{2N}\right)=\frac{r}{4}.$$

令 $h=P+g$。证明：

$$h\in B(f,r)\text{但}\,h\notin F_n.$$

(iii) 由此导出 F_n 内部分空。

(d) 最终导出 A 包含一个稠密的 G_δ 集。

问题 32. 设 E 是 Banach 空间，$u,v\in\mathcal{B}(E)$. 证明：如果 $u(E)\subset v(E)$, 那么存在常数 $k\geqslant 0$, 使得对任意 $x\in E$, 存在 $y\in E$, 使得 $\|y\|\leqslant k\|x\|$ 且 $u(x)=v(y)$.

问题 33. 设 H 是 Hilbert 空间，且线性映射 $u:H\to H$ 满足

$$\langle u(x),\ y\rangle=\langle x,\ u(y)\rangle,\ \forall x,y\in H.$$

证明：u 连续.

问题 34. 设 E 是可分 Banach 空间且 $E\neq\{0\},(x_n)_{n\geqslant 1}$ 是单位球 B_E 中的稠密序列.

(a) 证明：存在 $u \in \mathcal{B}(\ell_1, E)$, 使得

$$u((a_n)_{n\geqslant 1}) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n.$$

(b) 证明：u 作用在 ℓ_1 的开单位球上的像集为 B_E. 试问：u 作用在 ℓ_1 的闭单位球上的像集是什么?

(c) 令 $1 < p < \infty$.

  (i) 证明：存在一个连续线性满射 $u : \ell_1 \to \ell_p$.

  (ii) 证明：不存在任何连续线性映射 $v : \ell_p \to \ell_1$ 使得 $u \circ v$ 等于 ℓ_p 上的恒等映射.

  (iii) 证明：ℓ_1 中不存在任何闭向量子空间 F 使得 $F \oplus \ker u = \ell_1$.

问题 35 (Banach-Steinhaus 定理,一般形式). 本习题希望将 Banach-Steinhaus 定理 (定理2.1) 推广到拓扑向量空间上，参见 [**17**] p43-47. 设 X, Y 为两个拓扑向量空间，$(u_i)_{i\in I}$ 为 X 到 Y 的线性映射族. 假设 X 的拓扑可以被一个完备的**平移不变的**的距离诱导，此时称 X 为一个 **F-空间**，并且对每个 $x \in X$，轨道 $(u_i(x))_{i\in I}$ 为 Y 中有界子集.

(1) 在 Y 的原点 O 处任取以邻域 W，选择原点的平衡凸邻域 U，使其满足 $U + U \subset W$. 证明：

$$X = \bigcup_{n\geq 1} nA$$

其中

$$A = \bigcap_{i\in I} u_i^{-1}(U)$$

(2) 证明：$\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$.

(3) 证明：存在 X 中原点 O 的邻域 V，使得

$$u_i(V) \subset W, \quad \forall i \in I$$

这是算子族 $(u_i)_{i\in I}$ **等度连续**的定义.

(4) 当 X, Y 为局部凸空间时，用相应的半范数族表示以上结果.

问题 36 (开映射定理与闭图像定理，一般形式). 本习题希望将开映射定理与闭图像定理推广到 F-空间 (见问题35)，参见 [**17**] p47-49，p50-51. 证明：

(1) 设 $u: X \to Y$ 为 F-空间之间的连续线性映射. 若 $u(X)$ 不是贫集，则 u 为满射且为开映射.

(2) 设 $u: X \to Y$ 为 F-空间之间的线性映射，则 u 连续当且仅当 u 的图像 $\Gamma(u)$ 为闭集.

Part 3

算子理论

CHAPTER 7

Hahn-Banach 定理、弱拓扑与弱 * 拓扑

旨趣. 本章的主线是解决两个问题：一是如何赋范子空间 (一般地，拓扑向量子空间) 中将满足某条件的连续线性泛函延拓到大空间中并且保持某条件；二是如何在赋范空间 (一般地，拓扑向量空间) 中定义一种弱性的拓扑使得第2章中 Riesz 定理 (定理1.3) 的情况可被避免. 其中第一个问题被 Hahn-Banach 定理解决，作为推论，我们还能说明一般 Hausdorff 局部凸空间的对偶空间可分点，这将被用于说明构造的弱拓扑具有更好的性质；此外，借助延拓定理可以证明拓扑向量空间中不交凸集的隔离性质，即用一张超平面将 TVS 中两个凸集分离开，这具有极强的几何含义；最后，我们将基于 Hahn-Banach 定理定义赋范空间 X 上的弱拓扑 $\sigma(X, X^*)$ 以及对偶空间 X^* 上的弱 * 拓扑 $\sigma(X^*, X)$，它们的作用将在第8章中凸显.

1. Hahn-Banach 定理：算子延拓

1.1. 延拓引理.

定义 1.1. 设 X 为域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，称泛函 $p: X \to \mathbb{R}$ 为 X 上的一个**次线性泛函**，如果满足

(1) **正齐次性**：对任意 $\lambda \geq 0$，有 $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in X$；

(2) **次可加性**：

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X$$

引理 1.1 (延拓引理). 设 $X, \overline{X}$ 为域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，其中 X 为 $\overline{X}$ 的余一维子空间 ($\mathrm{codim} X = 1$)，f, p 分别为 $X, \overline{X}$ 上的线性泛函与次线性泛函，满足 $f \leq p|_X$. 则存在 $\overline{f}: \overline{X} \to \mathbb{R}$，使得

$$\overline{f}|_X = f, \quad \overline{f} \leq p$$

我们称 $\overline{f}$ 为 f 在 $\overline{X}$ 上的**延拓**.

证明. 由 $\mathrm{codim} X = 1$，存在 $(0 \neq) x_0 \in \overline{X} - X$，使得

$$\overline{X} = \mathrm{span}\{X, x_0\} = \{x + \lambda x_0 : x \in X, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

我们断言：若存在延拓 $\overline{f}: \overline{X} \to \mathbb{R}$，则 $\overline{f}$ 由 $\overline{f}(x_0)$ 的值唯一决定. 事实上，若设 $a = \overline{f}(x_0)$，进而

$$\overline{f}(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda a$$

注意到 $\overline{X}$ 中任一元素可唯一表示成 $x + \lambda x_0$，其中 $x \in X$.

下面说明使得

$$f(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda x_0) \tag{19}$$

的 a 是存在的.

不妨 $\lambda \neq 0$. 由 p 的正齐次性，整理不等式19为

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} f(x) + a \leq \frac{1}{\lambda} p(x + \lambda x_0), & \lambda > 0 \\ \frac{1}{-\lambda} f(x) - a \leq \frac{1}{-\lambda} p(x + \lambda x_0), & \lambda < 0 \end{cases}$$

进而

$$\begin{cases} a \leq p\left(\frac{1}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{1}{\lambda} x\right), & \lambda > 0 \\ a \leq f\left(\frac{1}{-\lambda} x\right) - p\left(\frac{1}{-\lambda} - x_0\right), & \lambda < 0 \end{cases}$$

由于 X 为子空间，上式等价于

$$f(y) - p(y - x_0) \le a \le p(x + x_0) - f(x), \quad \forall x, y \in X$$

那么 a 的存在性等价于说明 $f(y) - p(y - x_0) \le p(x + x_0) - f(x)$，即

$$f(x) + f(y) \le p(x + x_0) + p(y - x_0), \quad \forall x, y \in X$$

最后注意到 $f(x)+f(y) \le f(x+y) \le p(x+y) \le p(x+x_0)+p(y-x_0)$ 即可. $\square$

我们希望将上述余一维的延拓推广到余一般维数的延拓，事实上，当 $\mathrm{codim}X$ 有限甚至可数时，都可以利用数学归纳法时得到一般的延拓定理，但当 $\mathrm{codim}X$ 不可数时需要用到 Zorn 引理. 下面利用 Zorn 引理来证明一般维数的延拓定理.

1.2. Hahn-Banach 延拓定理.

定理 1.1 (Hahn-Banach 延拓定理，实情形). 设 $X, \overline{X}$ 为域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，其中 X 为 $\overline{X}$ 的子空间，f, p 分别为 $X, \overline{X}$ 上的线性泛函与次线性泛函，满足 $f \le p|_X$. 则存在 f 在 $\overline{X}$ 上的延拓 $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{R}$.

证明. 用 Zorn 引理. 构造偏序集：

$\mathcal{S} := \{(Y, g) : Y$ 为包含 X 的 $\overline{X}$ 的子空间，g 为 Y 上的线性泛函，满足 $g|_Y = f\}$

以及偏序关系 $\preceq$：

$$(Y_1, g_1) \preceq (Y_2, g_2) \Longleftrightarrow Y_1 \subset Y_2, \; g_2|_{Y_1} = g_1$$

断言 $(\mathcal{S}, \preceq)$ 中每个全序子集 $\mathcal{X}$ 存在上界. 事实上，在 $\mathcal{X}$ 中令

$$\tilde{X} = \bigcup_{(Y,g) \in \mathcal{X}} Y$$

$\mathcal{X}$ 全序说明 $\tilde{X}$ 为 $\overline{X}$ 的向量子空间. 在定义其上的线性泛函

$$\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = g(x), \; x \in Y, (Y, g) \in \mathcal{X}$$

注意这里 $\tilde{f}$ 是良定义的，事实上若还有 $(Y', g') \in \mathcal{X}$ 使得 $\tilde{f}(x) = g'(x)$, $x \in Y'$，由全序性不妨 $Y \subset Y', g'|_Y = g$，于是 $\tilde{f}(x) = g(x) = g'(x)$. 因此 $(\tilde{X}, \tilde{f})$ 为 $\mathcal{X}$ 中极大元.

由 Zorn 引理，偏序集 $(\mathcal{S},\preceq)$ 存在极大元 (M,m). 断言 $M=H$ 并且 m 记为所要求的延拓 $\overline{f}$. 事实上若 $M\neq H$, 则存在 $x_0\in\overline{X}-M$, 进而 M 为 $M+\mathbb{R}x_0$ 的余一维子空间，由引理1.1可知 $M+\mathbb{R}x_0$ 为 $\mathcal{S}$ 中更大的元素，与 M 的极大性矛盾! □

在具体问题时，一般大空间 $\overline{X}$ 上的 p 是某个 (半) 范数，因此 p 对 f 的控制应改为对 $|f|$ 的控制，并且空间可能是复数域上的空间，我们给出以下一般形式的延拓定理.

定理 1.2 (Hahn-Banach 延拓定理，一般形式). 设 $X,\overline{X}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，其中 X 为 $\overline{X}$ 的子空间，f,p 分别为 $X,\overline{X}$ 上的线性泛函与半范数，满足 $|f|\leq p|_X$. 则存在 f 在 $\overline{X}$ 上的延拓 $\overline{f}:\overline{X}\to\mathbb{K}$.

证明. (1) 当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时，由定理1.1，$\overline{f}\leq p$，又由半范数 p 的正定性，可得

$$-\overline{f}(x)-\overline{f}(-x)\leq p(-x)=p(x),\quad \forall x\in\overline{X}$$

因此 $|f|\leq p(x)$

(2) 当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时，首先令 $\varphi=\mathrm{Re}f$. 注意到

$$\varphi(ix)+i\mathrm{Im}f(ix)=f(ix)=i\varphi(x)-\mathrm{Im}f,\quad \forall x\in X$$

其中第一个等号由于实虚部的定义，第二个等号由于 f 的线性性. 可以看出

$$\varphi(ix)=-\mathrm{Im}f(x),\quad \forall x\in X$$

因此复线性泛函 $f:X\to\mathbb{C}$ 由其实部 φ 唯一确定，即

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix),\quad \forall x\in X$$

并且满足 $|\varphi|\leq|f|\leq p$. 由 (1) 可知存在 φ 的延拓 $\overline{\varphi}:\overline{X}\to\mathbb{R}$. 定义

$$\overline{f}(x)=\overline{\varphi}(x)-i\overline{\varphi}(ix),\quad \forall x\in\overline{X}$$

我们断言 $\overline{f}$ 即为复泛函 f 的延拓. 显然 $\overline{f}_X=f$，下面验证 $|\overline{f}|\leq p$. 为此我们对 $\overline{f}(x)$ 作规范化，即 $\overline{f}(x)=\frac{1}{\lambda}|\overline{f}(x)|$, $\forall x\in$

$\overline{X}$，其中 $\frac{1}{\lambda} = \mathrm{sgn}\overline{f}(x) \in \mathbb{C}$. 注意到

$$\begin{aligned}
|\overline{f}(x)| &= \lambda\overline{f}(x) \\
&= \overline{f}(\lambda x) \\
&= \overline{\varphi(\lambda x)} - i\overline{\varphi(i\lambda x)} \\
&= \overline{\varphi(\lambda x)} \leq p(\lambda x) = p(x)
\end{aligned}$$

其中第四个等号由于 φ 为实泛函，最后一个等号由于 $|\lambda| = 1$. □

注 1.1. 在上述定理复形式的证明中，我们实际上定义了空间 $\mathbb{X}$ 全体复线性泛函到实线性泛函的双射

$$\Phi[f] : \{\text{复线性泛函}\} \to \{\text{实线性泛函}\}$$

其中 $\Phi[f] = \varphi = \mathrm{Re}f$，并且有

$$f(x) = \Phi[f](x) - i\Phi[f](ix), \quad \forall x \in X$$

1.3. 延拓定理的若干应用.

1.3.1. *在拓扑向量空间中的应用.*

定理 1.3 (Hahn-Banach 延拓定理，拓扑向量空间形式). 设 $\overline{X}$ 为域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑向量空间，X 为 $\overline{X}$ 的向量子空间，f, p 分别为 $X, \overline{X}$ 上的线性泛函与连续的半范数，满足 $|f| \leq p|_X$. 则存在 f 在 $\overline{X}$ 上的连续延拓 $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{K}$，即满足定理1.2延拓的两条性质并且是连续的.

证明. 由定理1.2立即得到要求的 $\overline{f}$，而 $\overline{f}$ 的连续性由 $|\overline{f}| \leq p$ 保证 (注意到 p 是连续的). □

定理 1.4 (定理：Hahn-Banach 延拓定理，局部凸空间形式). 设 $\overline{X}$ 为局部凸空间，$\overline{X}$ 为 $\overline{X}$ 的向量子空间，f 为 X 上连续线性泛函，则存在 f 在 $\overline{X}$ 上的连续延拓 $\overline{f}$.

证明. 由定理2.2，不妨设 $\overline{X}$ 的拓扑被一族半范数为 $(p_i)_{i\in I}$，进而子空间 X 继承其子空间拓扑. 由 f 的连续性，结合命题2.2，存在有限子集 $J \subset I$ 以及常数 $C > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq C \max_{i\in J} p_i(x), \quad \forall x \in X$$

令 $p=\max_{i\in J}p_i(x)$，显然 p 也是连续的，利用定理1.3即可. □

对一维子空间，不难证明：

推论 1.1. 设 X 为拓扑向量空间，p 为 X 上连续的半范数. 对 $x_0\in X$，存在 $f\in X^*$ 使得 $f(x_0)=p(x_0)$ 且 $|f|\leq p$.

练习 1.1. 应用定理1.3证明上述推论.

利用上述推论，我们能够说明 Hausdorff 局部凸空间上有足够多的连续线性泛函，并且是可分点的.

推论 1.2. 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，则 X^* 是可分点的，即对任一非零向量 $x_0(\in X)$，存在 $f\in X^*$ 使得 $f(x_0)\neq 0$.

证明. 任取非零向量 $x_0(\in X)$ 由 X 为 Hausdorff 局部凸空间，进而存在连续半范数 p 使得 $p(x_0)\neq 0$，再由上述推论可知存在 $f\in X^*$ 使得 $f(x_0)=p(x_0)\neq 0$. □

1.3.2. *在赋范空间中的应用.* 当限制在赋范空间中讨论时，泛函的延拓是**保范**的，即若 X 为 $\overline{X}$ 的赋范线性子空间时，X 中任一连续线性泛函 $f\in X^*$ 可延拓为 $\overline{X}$ 中的连续线性泛函 $\overline{f}(\in\overline{X}^*)$，并且

$$||f||_{X^*}=||\overline{f}||_{\overline{X}^*}$$

定理1.3直接蕴含 $||\overline{f}||\leq||f||$，事实上，由于 $f\in X^*$，于是

$$||f(x)||\leq||f||_{X^*}\cdot||x||,\quad\forall x\in X$$

进而

$$||\overline{f}(x)||\leq||f||_{X^*}\cdot||x||,\quad\forall x\in X$$

这说明 $||\overline{f}||\leq||f||$. 而反向不等式直接由 $X\subset\overline{X}$ 蕴含. 因此延拓是保范的.

回忆推论1.2，对赋范空间而言，$f(\in X^*)$ 的算子范数是可控的，事实上 $f(x_0)=||x_0||$，这说明

$$||f||\leq 1$$

我们还可以利用 X 的对偶空间 X^* 反过来表示 X 中元素的范数

引理 1.2 (范数的对偶表示). 设 X 为赋范空间，对任意 $x \in X$，范数可以表示为

$$||x|| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*,\ ||f|| \leq 1\}$$

并且上确界是可以达到的.

证明. 记

$$\alpha := \sup\{|f(x)| : f \in X^*,\ ||f|| \leq 1\}$$

首先，对任意 $f \in X^*$，都有 $|f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x||$，因此 $\alpha \leq ||x||$.

反过来，由上文的讨论可知，对任意 $x \in X$，存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) = ||x||$ 且 $||f|| \leq 1$. 因此 $||x|| \leq \alpha$，这也说明上确界是可以达到的. □

回忆第2章中算子范数的等价定义，见练习2.2，不难发现上述引理中的表达

$$\sup\{|f(x)| : f \in X^*,\ ||f|| \leq 1\}$$

恰好可以视为对偶空间 X^* 的线性算子的范数，更惊喜的是，这个“范数”恰好等于原空间 X 中的范数，因此我们期望赋范空间本身能够与对偶空间的对偶空间发生联系. 形式上，这个观察基于对符号 $f(x)$ 的理解，事实上，我们可以将其看作**形式内积**

$$< f, x >:= f(x), \quad \forall x \in X, f \in X^*$$

为了澄清这个说法，我们考虑双线性泛函 (线性性不难验证)

$$B : X^* \times X \to \mathbb{K}, \quad B(f, x) =< f, x >= f(x)$$

于是 $|B(f, x)| \leq ||f|| \cdot ||x||$，这说明 B 是连续的 (不妨与推论2.2比较)，进而每个分量映射也是连续的. 这说明

$$B(-, x) \in (X^*)^* =: X^{**}$$

后者称为 X 的**二次对偶空间**. 并且 $||B(-, x)|| \leq ||x||$. 而引理1.2蕴含 $||B(x, -)|| \geq ||x||$，因此

$$||B(-, x)||_{X^{**}} = ||x||_X$$

这说明 X 可以被等距嵌入 X^{**}，即

$$X \hookrightarrow X^{**}, \quad x \mapsto B(x, -)$$

其中嵌入的像记为 $\hat{X}$，其中元素记为 $\hat{x}$. 因此我们等同 $\hat{X}$ 与 X，往后称这个嵌入为**自然嵌入**.

2. Hahn-Banach 定理：分离性质

2.1. Hahn-Banach 隔离定理. 回忆注1.1，我们用 φ 表示一般复线性泛函的实部，并且用 $\{\varphi < \alpha\}$，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 表示 $\{x \in X : \varphi(x) < \alpha\}$，其余形式同理.

定理 2.1 (Hahn-Banach 隔离定理). 设 X 为拓扑向量空间，A, B 为 E 中非空凸子集且 $A \cap B = \emptyset$. 若 A 为开集，则存在 $f \in X^*$ 以及常数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$A \subset \{\varphi < \alpha\}, \quad B \subset \{\varphi \geq \alpha\}$$

注 2.1. 线性泛函 φ 关于 α 的水平集 $\{\varphi = \alpha\}$ 是 X 中**超平面**，特别地，当 $\alpha = 0$ 时为过原点 O 的超平面. 因此上述隔离定理 (与下一个严格隔离定理) 的几何含义为：拓扑向量空间中不交的凸子集在某些条件下可以被某个实线性泛函的水平集 (严格) 隔离. 其等价的表示为

$$\varphi(a) < \alpha \leq \varphi(b), \quad \forall a, b \in X$$

其中严格隔离指的是

$$\sup \varphi(A) < \alpha < \beta < \inf \varphi(B), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

证明. 仅考察 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 的情形，事实上若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，作 $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ 即可.

我们令 $a \in A, b \in B$ 以及 $x_0 = b - a$，$C = A - B + x_0$. 断言：

(1) C 为凸集；
(2) C 为开集；
(3) 原点 $O \in C$；
(4) $x_0 \notin C$.

其中 (1)(2)(3)(4) 是显然的，留作习题.

Step 1 由上述断言的 (1)(2)(3)，C 为原点 O 的一个凸平衡开邻域，我们取 C 的 Minkowski 泛函 (见定义2.4)，即

$$p_C(x) = \left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in X\right\}, \quad \forall x \in X$$

Step 2 我们知道 p_C 是一个半范数，结合推论1.1可知存在 $\overline{f} \in X^*$ 使得 $f(x_0) = p_C(x_0)$ 且 $f \leq p_C$，进而

$$f(a) - f(b) + f(x_0) = f(0) \leq p(x_0) < 1$$

其中上式第一个等号由于 f 的线性性，第二个不等号由命题2.4的 (2) 和上述断言中的 (3). 但 $f(x_0) = p(x_0) \leq 1$(由于上述断言的 (4))，因此 $f(a) < f(b)$，两边取确界可知

$$\sup f(A) \leq \inf f(B)$$

Step 3 由 A, B 为凸集以及 f 的线性性可知 $f(A), f(B)$ 为 $\mathbb{R}$ 中凸集，进而为区间. 此外，由 A 为开集可以验证 $f(A)$ 也为开集，进而是开区间，不妨 $f(A) = (\beta, \alpha)$，其中 $\beta \in [-\infty, \infty)$，$\alpha = \sup f(A) \leq \inf f(B)$. 因此

$$A \subset \{f < \alpha\}, \quad B \subset \{f \geq \alpha\}$$

□

练习 2.1. 验证上述定理证明断言中的 (1)(2)(3)(4).

注 2.2. 上述定理的证明中可以看出拓扑向量空间中非零的线性泛函一定是开映射.

回忆度量空间中不交的紧集与闭集存在正距离，对 Hausdorff 局部凸空间，我们有类似的性质.

定理 2.2 (Hahn-Banach 严格隔离定理). 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，A, B 为不交凸子集. 若 A 为紧集，B 为闭集，则存在 $f \in X^*$ 以及常数 α, β 使得

$$\sup \varphi(A) < \alpha < \beta < \inf \varphi(B)$$

证明，SKETCH. 证明参见 [**32**]. □

2.2. Hahn-Banach 隔离定理的应用. 拓扑学中 (参见 [**26**])，T_4 空间 X 等价于任意两个不交闭集可以被连续函数隔离，即若 A, B 为不交的闭集，则存在连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$，使得

$$f(A) = 0,\ f(B) = 1$$

这被称为 Urysohn 引理. 利用定理2.2，我们可以对 Hausdorff (T_2) 的局部凸空间证明一个弱形式的 Urysohn 引理，即这类空间中不交的单点集与平衡闭凸集可以被连续线性泛函 “隔离” (回忆 T_3 空间的定义).

引理 2.1 (Urysohn 引理). 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，B 为平衡的闭凸集，$x \in X - B$，则存在 $f \in X^*$，使得

$$f(x_0) > 1, \quad \sup_{x\in B} |f(x)| \le 1$$

证明. 令 $A = \{x_0\}$，显然为紧集，由定理2.2，存在 $f \in X^*$ 以及常数 α, β 使得

$$\varphi(x_0) < \alpha < \beta < \inf \varphi(B)$$

由 $0 \in B$(平衡集) 可知 $\alpha < 0$. 令 $g = \frac{1}{\alpha} f$，于是 $g \in X^*$，进而

$$\sup \mathrm{Re} g(B) < 1 < \mathrm{Re} g(x_0) \le |g(x_0)| = \lambda g(x_0), \quad \lambda = \mathrm{sgn} g(x_0)$$

令 $h = \lambda g$，断言 h 就是所要求的泛函 f. 事实上 $h(x_0) = |g(x_0)| > 1$，又由 B 为平衡集，于是

$$\sup |h|(B) = \sup |g|(B) = \sup \mathrm{Re} g(B) \le 1$$

$\square$

通过上述隔离单点集与平衡闭凸集的 Urysohn 引理，我们能够得到一个判断元素是否属于子空间闭包的判别办法.

命题 2.1. 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，E 为其向量子空间且 $x_0 \in E$. 则 $x_0 \in \overline{E}$(拓扑闭包) 当且仅当对任意 $f \in X^*$，若 $f|_E = 0$，则 $f(x_0) = 0$.

证明. 由 f 的连续性，必要性是显然的. 下证充分性.

反证法. 假设 $x_0 \notin \overline{E}$，由引理2.1(显然子空间闭包 $\overline{E}$ 是平衡闭凸集) 可知存在 $f \in X^*$ 使得

$$f(x_0) > 1, \quad \sup |f|(\overline{E}) \leq 1$$

这说明对任意 $x \in \overline{E}$，都有 $|f|(x) \leq 1$，而 E 为向量子空间，进而 $f|_E = 0$，由条件可知 $f(x_0) = 0$ 这与 $f(x_0) > 1$ 矛盾! □

立即的推论是可以利用连续线性泛函判断子空间的稠密性.

推论 2.1. 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，E 为其向量子空间，则 E 在 X 中稠密当且仅当对任意 $f \in X^*$，若 $f|_E = 0$，则 $f = 0$.

练习 2.2. (1) 利用命题2.1证明上述推论.

(2) 利用命题2.1证明推论1.2，即若 $x \neq y$，则存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) \neq f(y)$.

最后，我们利用 Hahn-Banach 严格隔离定理说明：有相同对偶空间的 Hausdorff 局部凸空间有相同的凸闭集.

定理 2.3 (Mazur). 设 X 为向量空间，τ_1, τ_2 为其上两个 Hausdorff 拓扑，并使得 $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ 称为局部凸空间. 如果

$$(X, \tau_1)^* = (X, \tau_2)^*$$

即对 X 中任意线性泛函 $f : X \to \mathbb{K}$，它 τ_1-连续等价于 τ_2-连续. 那么对 X 中任一凸集，都有

$$\overline{A}^{\tau_1} = \overline{A}^{\tau_2}$$

即 X 中任一凸集 τ_1 闭当且仅当 τ_2 闭.

证明. 反证法. 假设 X 中凸集 A 是 τ_1 闭的但不是 τ_2 闭的，即存在 $x_0 \in \overline{A}^{\tau_2}$ 而 $x_0 \notin A$. 由定理2.2可知存在 $f \in (X, \tau_1)^*$ 以及常数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$\varphi(x_0) < \alpha < \inf \varphi(A)$$

而由条件，$f \in (X, \tau_2)^*$，又因为 $x_0 \in \overline{A}^{\tau_2}$，进而 $\alpha < \inf \varphi(A)$ 蕴含 $\alpha \leq \varphi(x_0)$，与上式矛盾! □

注 2.3. 以上定理中的凸条件是必要的. 此外，凸的 τ_1-开集不一定是凸的 τ_2-开集.

3. 弱拓扑与弱 * 拓扑

3.1. 半范数族的连续性. 在引入弱拓扑之前，我们需要回顾和进一步证明两件事情:

- 回顾向量空间如何利用向量空间上的半范数族构造拓扑并统一这中构造性拓扑的记号.
- 命题2.1说明半范数族构造的拓扑是使得所有半范数连续的最弱拓扑，我们将进一步这个结果的逆命题，即在该拓扑下连续的线性泛函一定是半范数族中的成员.

3.1.1. *回顾局部凸空间.* 在本节中，我们均假设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，F 为 X 上某些线性泛函构成的向量空间，并且总约定 F 是可分点的，即对任意 $(0 \neq)x \in X$，都存在 $f \in F$，使得 $f(x) \neq 0$. 由推论1.2，在局部凸空间上这个约定是允许的.

因此 $\{|f| : f \in F\}$ 成为 X 上可分点的半范数族, 利用第4章第2节的结果我们知道 X 在此半范数族下成为半赋范空间并且依此族诱导的拓扑 τ' 成为局部凸空间. 为了澄清是何种半范数族在何空间中诱导的拓扑，我们将拓扑记号 τ' 改记为 $\sigma(X, F)$，并且在叙述该拓扑下的性质时 (例如闭集) 加上前缀 $\sigma(X, F)$-(记为 $\sigma(X, F)$-闭集).

3.1.2. *半范数拓扑的泛性质.* 根据上文的说法，即命题2.1，我们知道

$$F \subset (X, \sigma(X, F))^*$$

即任一 F 中的元素 (即 X 上的连续线性泛函) 在拓扑 $\sigma(X, F)$ 下连续. 下面证明反向包含，即在拓扑 $\sigma(X, F)$ 下连续的线性泛函一定属于 F. 综上可知

$$F = (X, \sigma(X, F))^*$$

我们把这个性质称为半范数拓扑 $\sigma(X, F)$ 的**泛性质**.

要证明这个性质，需要一个引理.

引理 3.1. 设 X 为域 $\mathbb{K}$ 上向量空间，$f_1, \cdots, f_n$ 为 X 上有限个线性泛函，则下面说明互相等价:

(1) f 是 $f_1,\cdots,f_n$ 的线性组合：

$$f=\sum_{k=1}^{n}c_kf_k,\quad c_k\in\mathbb{K},\ \forall 1\leq k\leq n$$

(2) 存在常数 $C\geq 0$ 使得

$$|f(x)|\leq C\max_{1\leq k\leq n}|f_k(x)|,\quad \forall x\in X$$

(3)

$$\bigcap_{1\leq k\leq n}\ker f_k\subset\ker f$$

引理 3.2. 显然 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3). 下证 (3) $\Longrightarrow$ (1). 构造集合

$$G:=\{(f_1(x),\cdots,f_n(x)):x\in X\}\subset\mathbb{K}^n$$

由 $f_1,\cdots,f_n$ 的线性性可知 G 为 $\mathbb{K}^n$ 的向量子空间. 定义映射

$$\Phi:G\to\mathbb{K},\quad (f_1(x),\cdots,f_n(x))\mapsto f(x)$$

断言 Φ 是良定义的,事实上,若 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))=(f_1(x'),\cdots,f_n(x'))$, $x,x'\in X$, 即

$$(f_1(x-x'),\cdots,f_n(x-x'))=0$$

由 (3) 可知 $f(x)=f(x')$. 此外，容易验证 Φ 是线性的. 由定理1.2可知 Φ 可延拓成为 $\overline{\phi}:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$. 因此，存在 $(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{K}^n$ 使得

$$\overline{\Phi}(y_1,\cdots,y_n)=\sum_{k=1}^{n}c_ky_k$$

再将 $\overline{\Phi}$ 限制在 G 上，即得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_kf_k(x),\quad \forall x\in X$$

练习 3.1. (1) 验证上述证明中的 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3).
(2) 验证上述证明中的 Φ 是线性的.

最后，我们来说明

$$F\supset(X,\sigma(X,F))^*$$

设 $f : X \to \mathbb{K}$ 是 $\sigma(X,F)$-连续的，由命题2.2可知存在常数 $C \geq 0$ 以及 $f_1, \cdots, f_n \in F$ 使得

$$|f| \leq C \max_{1\leq k\leq n} |f_k|$$

不妨 $C = 1$, 否则替换 f_k 为 Cf_k, 由上述引理可知存在 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{K}$ 使得

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$$

最后，由 F 为向量空间可知 $f \in F$. 因此 $F \supset (X, \sigma(X,F))^*$.

3.2. 弱拓扑与弱 * 拓扑.

3.2.1. *弱拓扑与弱 * 拓扑的定义与例子.*

定义 3.1. 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，X^* 为对偶空间.

(1) 称 $\sigma(X,X^*)$ 为 X 上的**弱拓扑**.

(2) 称 $\sigma(X^*,\hat{X})$ 为 X^* 上的**弱 * 拓扑**.

其中 $\hat{X}$ 为等距嵌入 $X \hookrightarrow X^{**}$ 的像.

注 3.1. (1) 由推论1.2可知 $\sigma(X,X^*)$ 为 Hausdorff 拓扑，进而 $\sigma(X^*,\hat{X})$ 也为 Hausdorff 拓扑.

(2) 由第2节最后的讨论, 我们可以等同 X 与 $\hat{X}$, 进而记 $\sigma(X^*,\hat{X})$ 为 $\sigma(X^*,X)$. 此外，将弱拓扑与弱 * 拓扑性质的叙述用简单的记号 w-和 w^*-代替，即称集合 A 为弱拓扑下的闭集，则记为 w-闭，同样，弱 * 拓扑下的闭集记为 w^*-闭.

(3) 上一小节的讨论告诉我们: 局部凸空间 X 装备弱拓扑后的对偶空间就是其自然拓扑 (局部凸空间拓扑 τ) 下的对偶空间; 对偶空间装备弱 * 拓扑后的对偶空间 (原空间的二次对偶) 就是原空间本身. 即

$$(X, \sigma(X,X^*))^* = X^*, \quad (X^*, \sigma(X^*,X)) = X$$

我们称这条性质为**对偶原理**.

我们来说明为什么拓扑 $\sigma(X,X^*)$ 称为 “弱” 拓扑. 事实上，当 X 为赋范空间时，X^* 自然成为 Banach 空间，其上算子范数 $\|-\|$ 自

然诱导一个拓扑，相比 w^*-拓扑，我们称其为强拓扑. 这因为，若任取 $\hat{x} \in (X^*, \sigma(X^*, X))^*$，对任意 $x^* \in X^*$，我们有

$$|\hat{x}(x^*)| = x^*(\hat{x}) \leq ||x^*|| \cdot ||\hat{x}||$$

因此 $\hat{x} \in (X^*, ||-||)^*$.

3.2.2. 极性.

定义 3.2. 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，X^* 为对偶空间，称 X^* 的子集 A° 为 X 的子集 A 的**极集**，如果

$$A^\circ := \{x^* \in X^* : |x^*(x)| \leq 1, \ \forall x \in A\}$$

反过来，称 X 的子集 $B_\circ$ 为 X^* 的子集 B 的**极集**，如果

$$B_\circ := \{x \in X : |x^*(x)| \leq 1, \ \forall x^* \in B\}$$

注 3.2. 上述记号 $B_\circ$ 参考自 [**17**]. 事实上，我们可以采用统一的记号 B°，即将 $\circ$ 统一记在右上角，不论是哪个空间的子集，这是因为我们有等同

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X$$

定义 3.3. 设 X 为赋范空间，F, G 分别为 X, X^* 的向量子空间，称

(1) $F^\perp$ 为 F 的**零化子**，如果

$$F^\perp := \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0, \quad \forall x \in F\}$$

(2) $G_\perp$ 为 G 的**预零化子**，如果

$$G_\perp := \{x \in X : x^*(x) = 0, \quad \forall x^* \in G\}$$

命题 3.1. 设 A° 为 $A(\subset X)$ 的极集，则有

(1) A° 是 w^*-闭的凸平衡集.
(2) 若 $A \subset B \subset X$，则 $B^\circ \subset A^\circ$.
(3) 记 $\mathrm{convba}A$ 为 A 的**凸平衡包** (包含 A 的最小凸平衡集)，则 $A^\circ = \mathrm{ccb}A$，其中 $\mathrm{ccb}A$ 表示 A 的**闭凸平衡包**，即 $\mathrm{ccb}A = \overline{\mathrm{convba}A}$.
(4) $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda}A^\circ$，其中 $(0 \neq)\lambda \in \mathbb{K}$.

(5)

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$$

(6) 若 A 还是 X 的向量子空间，则 $A^\perp = A^\circ$，事实上

$$A^\circ = \{x \in X^* : x^*|_A = 0\}$$

并且 $A^\perp = A^\circ$ 为 X^* 的 w^*-闭向量子空间.

(7) 以上命题对 $B(\subset X^*)$ 的极集 B° 也成立. 其中 w^*-性质应改为 w-性质，w-性质应改为 w^*-性质.

证明. 上述说法中：(1) 的凸性与平衡性是显然的；(2)(4)(5)(6) 是显然的；(7) 利用对偶原理即得.

首先证明 (1) 中的 A° 是 w^*-闭的. 任取 $a \in A$，由连续性可知 $\hat{a}(\overline{B_{\mathbb{K}}})$ 为 w^*-闭集，进而 $A^\circ = \bigcap_{a\in A} \hat{a}(\overline{B_{\mathbb{K}}})$ 为 w^*-闭集.

再证明 (3)，断言

$$\mathrm{convba}A = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = 1,\ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{20}$$

定义的合理性由读者补充. 由 (2) 可知 $\mathrm{Int}(\mathrm{ccb}A) \subset A^\circ$. 反过来，任取 $x^* \in A^\circ$，由定义可知 $\sup|x^*(A)| \le 1$. 令 $x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}$，使得 $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \le 1$，进而

$$x^*\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot |x^*(x_k)| \le 1$$

由于 x^* 在 X 上连续，于是

$$\sup|x^*(\mathrm{ccb}A)| \le 1$$

因此 $x^* \in (\mathrm{ccb}A)^\circ$，故 $A^\circ \subset (\mathrm{ccb}A)^\circ$. □

练习 3.2. (1) 证明上述命题中 (1) 的凸性与平衡性，并验证公式20的合理性.

(2) 证明上述命题中的 (2)(4)(5)(6).

(3) 叙述并证明上述命题中的 (7).

定理 3.1 (双极定理). 设 X 为 Hausdorff 局部凸空间，设 A, B 分别为 X, X^* 的子集.

(1) $A^{\circ\circ} = A$ 当且仅当 A 为凸闭 (等价于 w-闭，由定理2.3) 平衡集. 一般地，

$$A^{\circ\circ} = \mathrm{ccb}A$$

(2) $B^{\circ\circ} = B$ 当且仅当 B 为凸 w^*-闭平衡集. 一般地，

$$B^{\circ\circ} = \mathrm{ccb}B$$

证明. 我们仅证明 (1)，(2) 是同理的，留作习题. 首先，必要性由命题3.1蕴含. 下证充分性.

显然 $A \subset A^{\circ\circ}$. 反过来，取 $x \in X - A$，由 Urysohn 引理 (即引理2.1)(注意 A 满足引理条件) 可知存在 $x^* \in X^*$ 使得 $x^*(x) > 1$ 且 $\sup|x^*(A)| \leq 1$. 因此 $x^* \in A^\circ$ 而 $x \neq A^{\circ\circ}$，这说明 $A^{\circ\circ} \subset A$. □

习题七

问题 37. 设 E 是 Hausdorff 局部凸空间，$A \subset E$. 定义 E 的子集 $\widehat{A}$ 由满足如下性质的元素 x 构成：若取 $f \in E^*$ 满足对任意 $a \in A$，有 $|f(a)| \leqslant 1$，则 $|f(x)| \leqslant 1$. 设 $\operatorname{ccb} A$ 表示 A 的闭凸平衡包，即包含 A 的所有闭凸平衡集的交集.

(a) 证明：$\operatorname{ccb} A \subset \widehat{A}$.
(b) 证明：$\operatorname{ccb} A = \widehat{A}$ 等价于 $0 \in \operatorname{ccb} A$.

问题 38. 设 E 是赋范空间，而 X 是 E 的有限维向量子空间. 我们的目标是证明：X 是 E 的余子空间.

(a) 设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 X 中的一组基. 证明：存在 X 上一组连续线性泛函 $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$，使得 $\langle e_i, e_j^* \rangle = 0, \forall i \neq j$ 以及 $\langle e_i, e_i^* \rangle = 1$.
(b) 定义 $P : E \to E$ 为

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i,\ \forall x \in E.$$

证明：P 是像集为 X 的连续线性映射，且有 $P \circ P = P$.
(c) 导出 $\ker P$ 是 X 在 E 中的拓扑补子空间，即 $E = X \oplus \ker P$.
(d) 该结论在 E 是 Hausdorff 局部凸空间时是否仍然正确?

问题 39. 考虑空间 ℓ_∞ 和它的向量子空间 F：

$$F = \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_{n \to \infty} m_n(x) \text{ 存在} \right\}, \quad \text{其中} m_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(a) 定义 $f : F \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = \lim_{n \to \infty} m_n(x)$. 证明：$f \in F^*$.
(b) 证明：存在 ℓ_∞ 上连续线性泛函 m 满足下面的性质：
  (i) $\liminf_{n \to \infty} x_n \leqslant m(x) \leqslant \limsup_{n \to \infty} x_n$，$\forall x \in \ell_\infty$.
  (ii) $m \circ \tau = m$，这里 $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$ 是右移算子，即 $\tau(x)_n = x_{n+1}$.（m 被称为 Banach 平均或 ℓ_∞-极限.）

问题 40. 保持上一习题中的概念，并用 1 表示每项为 1 的序列，Y 表示映射 $\ell_\infty - \tau$ 的像集.

(a) 证明：$d(1, Y) \geqslant 1$.

(b) 定义函数 $f : \operatorname{span}(Y \cup \{1\}) \to \mathbb{R}$ 如下

$$f(t\mathbf{1} + y) = t, \quad t \in \mathbb{R},\ y \in Y.$$

证明：f 是范数为 1 的线性泛函.

(c) 证明: 存在 ℓ_∞ 上的一个范数为 1 的线性泛函 m, 使得 $m \circ \tau = m$.

问题 41. 设 E 和 F 都是赋范空间，$u : E \to F$ 是线性映射. 证明下面的命题等价:

(a) $u : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|)$ 连续.
(b) $u : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ 连续.
(c) $u : (E, \|\cdot\|) \to (F, \sigma(F, F^*))$ 连续.

问题 42. 考虑实 Banach 空间 ℓ_1. 回顾基本结论：ℓ_1 是 c_0 的对偶空间，ℓ_∞ 是 ℓ_1 的对偶空间.

(a) 设 $x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \ell_1$，且对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $x^k = (x_n^k)_{n \geqslant 1} \in \ell_1$（注意这里的上标 k 不是幂，故 $(x^k)_{k \geqslant 1}$ 表示 ℓ_1 中的序列）.
- 证明：$x^k \xrightarrow{w^*} x$ 当且仅当 (x^k) 在 ℓ_1 中有界，且对每一个 $n \in \mathbb{N}$，有 $x_n^k \to x_n$.
- 举一个 (x^k) 的具体例子，使得 $x^k \xrightarrow{w^*} 0$ 但 $\|x^k\|$ 不趋向于 0.

(b) 设 $C = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. 我们在 $\{-1, 1\}$ 上赋予离散拓扑，则 C 上有相应的乘积拓扑. 令 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geqslant 1} \in C$ 及 $p \in \mathbb{N}$，令

$$V_{\varepsilon,p} = \{\eta = (\eta_n)_{n \geqslant 1} : \eta_n = \varepsilon_n, \forall n \leqslant p\}.$$

- 证明：$(V_{\varepsilon,p})_{p \in \mathbb{N}}$ 是拓扑空间 C 在 ε 处的邻域基.
- 解释 C 为什么是 Baire 空间.

我们现在假设：存在 ℓ_1 中的序列 (x^k) 及常数 $a > 0$，使得

$$x^k \xrightarrow{w} 0 \quad \text{且} \quad \|x^k\|_1 > 3a, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(c) 设 $k \in \mathbb{N}$，定义 $\phi_k : C \to \mathbb{R}$ 为

$$\phi_k(\varepsilon) = \sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n x_n^k, \quad \forall \varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geqslant 1} \in C.$$

证明：ϕ_k 连续. 进而导出：任取 $N \in \mathbb{N}$,

$$F_N = \bigcap_{k \geqslant N} \{\varepsilon \in C : |\phi_k(\varepsilon)| \leqslant a\}$$

是 C 的闭子集.

(d) 设 $p, N \in \mathbb{N}$ 且 $\varepsilon \in F_N$. 证明：存在 $k \geqslant N$，使得 $\sum_{n=1}^{p} |x_n^k|\ a$. 由此推出：存在 $k \geqslant N$ 及 $\eta \in V_{\varepsilon,p}$，使得 $\phi_k(\eta) > a$. 证明：每个 F_N 的内部是空集，因而有

$$C \setminus \bigcup_{N \in \mathbb{N}} F_N \neq \emptyset.$$

(e) 设 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \geqslant 1} \in C \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{N}} F_p$. 证明：存在一个递增的序列 (p_k)，使得

$$\left|\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n x_n^{p_k}\right| > a, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- 解释为什么这个结论和 $x^k \xrightarrow{w} 0$ 矛盾.

(f) 由命题 (c), (d) 和 (e) 导出：$x^k \xrightarrow{w} x$ 当且仅当 $\|x^k - x\|_1 \to 0$. 讨论本习题结论的意义是什么.

CHAPTER 8

Banach 空间对偶理论

旨趣. 回忆实分析中著名的 $\mathcal{L}^p$ 空间对偶理论，即 $\mathcal{L}^q$ 为 $\mathcal{L}^p$ 的对偶空间，其中 $1 < p, q < \infty$ 为共轭指标 (见第3)，它主要利用 Radon-Nikodym 定理 (参见 [**3, 16**]) 证明. 本章将研究一般 Banach 空间的对偶理论. 首先将第3章中的伴随算子的概念推广到一般的 Banach 空间，称为共轭算子，它蕴含算子到“对偶”算子的等距嵌入关系，即

$$\mathcal{B}(E, F) \hookrightarrow \mathcal{B}(F^*, E^*)$$

其次，受线性代数中短正合列基于 $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{K})$ 函子导出对偶正合列的启发，我们将研究 Banach 空间范畴中短正合列的对偶，其中最终要的刻画是子空间与商空间的对偶关系. 其次，研究一类特殊 Banach 空间，即自反空间，事实上，很多空间具有自反性，例如熟知的 $\mathcal{L}^p$ 其中 $1 < p < \infty$，但也有一大类空间是不自反的，例如 $c_0, l^\infty, \mathcal{L}^1((0,1)), C([0,1])$ 等等. 最后一节中将为对偶空间 E^* 中的闭单位球赋予不同的拓扑，其中 w^*-拓扑弥补了 Riesz 定理的缺陷，使得该拓扑下的有界闭集具有紧性，此外，不同拓扑的赋予还可以用于刻画空间的自反性 (例如定理3.3) 和序列收敛的精细程度，在第10章中被应用.

1. 子商对偶

为简化记号，本章中总是假定 E, F 为域 $\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间.

1.1. 共轭算子.

1.1.1. 共轭定理. 我们在第3章中介绍了 Hilbert 空间中的伴随算子，即设 $u \in \mathcal{B}(E, F)$，则存在唯一的伴随算子 $u^* \in \mathcal{B}(F, E)$，即

$$< y, u(x) >=< u^*(y), x >, \quad \forall x \in X, y \in Y$$

其中 X, Y 为 Hilbert 空间. 曾在注记中叙述了上述等式实际上利用了结果 $X \cong X^*, Y \cong Y^*$ 进行简化. 下面我们叙述在 Banach 空间中一般的理论，为此首先回忆形式内积 (见第7章第1节末尾)：

$$< -, - >: E^* \times E \to \mathbb{K}, \quad < x^*, x >:= x^*(x),\ x^* \in E^*, x \in E$$

并且存在**自然嵌入**

$$E \hookrightarrow E^*, \quad x \to \hat{x}(=< -, x >: E^* \to \mathbb{K})$$

定理 1.1 (共轭定理). 设 $u \in \mathcal{B}(E, F)$，则存在唯一的 $u^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$，使得

$$< f^*, u(x) >=< u^*(f^*), x >, \quad \forall x \in E, f^* \in F^*$$

即如下交换图成立：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u^*(f^*)"'] & & F \arrow[dl, "f^*"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

并且满足 $||u^*|| = ||u||$，称 u^* 为 u 的**共轭算子**.

证明. 我们分以下两步证明：

Step 1 先证存在性. 直接定义 $u^*(f^*) := f^* \circ u$, $\forall f^* \in F^*$. 进而

$$< U^*(f^*), x >= f^*(u(x)) =< f^*, u(x) >, \quad \forall x \in E$$

由 u, f^* 为连续线性性可知 $u^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$. 注意：利用上式中的关系，容易验证 u^* 是唯一的，留作习题.

Step 2 验证 $||u^*|| = ||u||$. 由 $||u^*||$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned} ||u^*|| &= \sup_{f^* \in F^*,\ ||f^*|| \le 1} ||u^*(f)|| \\ &= \sup_{f^* \in F^*,\ ||f^*|| \le 1} \sup_{x \in E,\ ||x|| \le 1} | < x, u^*(y) > | \\ &= \sup_{x \in E,\ ||x|| \le 1} \sup_{f^* \in F^*,\ ||f^*|| \le 1} | < u(x), y > | \\ &= \sup_{x \in E,\ ||x|| \le 1} ||u(x)|| = ||u|| \end{aligned}$$

其中倒数第二个等号来源于引理1.2.

□

练习 1.1. 验证上述证明中 u^* 是唯一的.

我们曾在第3章第3节的注3.2中宣称当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时形式内积与传统内积有细微区别，为此通过一个线性代数中的例子具体说明.

取 $\mathbb{C}$ 上的 n 维欧式空间 l_n^2 以及 $u \in \mathcal{B}(l_n^2)$. 我们选定 l_n^2 中的正交基 $(e_j)_{j=1}^n$，于是其中任一向量 x 表示为

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

由第2章中的例2.1，只要我们取定 u 在 $(e_j)_{j=1}^n$ 上的作用：

$$u(e_j) := (a_{1j}, \cdots, a_{nj}), \quad \forall a_{ij} \in \mathbb{C},\ j = 1, \cdots, n$$

那么矩阵 $(a_{ij})(=: [u])$ 被 u 唯一决定，并且 $u \mapsto [u]$ 是 $\mathbb{C}$-代数同构. 进而对上述向量 x，我们有

$$u(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right)$$

代入 Hilbert 空间中的伴随定理3.3，即

$$< y, u(x) > = < u^*(y), x >$$

其中 u^* 为 u 的伴随算子，$y := \sum_{j=1}^n y_j e_j$ 为 l_n^2 中另一向量. 那么上式推出

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{a_{ij}} x_j y_i = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_j x_i$$

其中 $[u^*] := (b_{ij})$. 因此，$[u^*] = [u]^*$，其中 $[u]^* := \overline{[u]}^T$. 同理，对 Banach 空间的形式内积而言，我们有 $[u^*] = [u]^T$.

1.1.2. 算子的共轭关系. 我们进一步研究当 u 为同构时 u^* 的性质，以及 u^* 为同构时 u 的性质.

首先, 若取 F 为 E 的向量子空间, 存在自然嵌入 $\iota : F \hookrightarrow E$, $x \mapsto x$. 进而 $||\iota|| = 1$，由定理1.1可知存在唯一的共轭算子 $\iota^* : E^* \to F^*$，并且满足

$$< \iota^*(e^*), x >=< e^*, \iota(x) >=< e^*, x >, \quad \forall x \in F, e^* \in E^*$$

因此 $\iota^*(e^*) = e^*|_F$. 特别地，当 $F = E$ 时，我们有

$$\iota = I_E, \quad \iota^* = I_{E^*}$$

利用这个关系，我们可以研究 u 与 u^* 的影响关系.

命题 1.1. 设 $u \in \mathcal{B}(E, F)$，则有

(1) 若 u 为同构，则 u^* 为同构且 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.
(2) 若 u^* 为同构且 E 完备，则 u 为同构.

证明. (1) 设 u 为同构，则存在 $u^{-1} \in \mathcal{B}(F, E)$，使得 $uu^{-1} = I_E$，$u^{-1}u = I_F$. 对这两个等式两边取共轭，于是

$$(uu^{-1})^* = (u^{-1})^* u^* = I_{F^*}, \quad (u^{-1}u)^* = u^*(u^{-1})^* = I_{E^*}$$

即 u^* 为同构且 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

(2) 分以下两步证明:

Step 1 由 (1) 可知 u^{**} 为同构，进而存在常数 $Cc_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1||x^{**}|| \leq ||u^{**}(x^{**})|| \leq C_2||x^{**}||$$

断言 $u^{**}|_{\hat{E}} = u$. 事实上，任取 $x \in E$，我们有

$$u^{**}(\hat{x}) \in F^{**} = (F^*)^*$$

于是

$$\begin{aligned} < u^{**}(\hat{x}), f^* > &=< \hat{x}, u^*(f^*) > \\ &=< u^*(f^*), x > \\ &=< f^*, u(x) > \\ &=< \hat{u(x)}, f^* > \end{aligned}$$

即 $u^{**}(\hat{x}) = \hat{u(x)}$，进而 $u^{**}(x) = u(x)$, $\forall x \in E$，这说明 $u^{**}|_{\hat{E}} = u$.

Step 2 由 $u^{**}|_{\hat{E}} = u$ 可知，u^{**} 为同构蕴含 u 为等距嵌入，下证 u 为满射. 由 u 的等距性可知 $u(E)$ 为完备子空间，进而为闭子空间.

我们利用第7章中判别稠密子空间的办法来证明 $u(E) = F$(注意 $u(E)$ 为闭子空间)，即2.1. 为此，任取 $f^* \in F^*$ 使得 $f^*|_{u(E)} = 0$，即 $f^*(u(x)) = 0$, $\forall x \in E$. 注意到

$$< u^*(f^*), x >=< f^*, u(x) >= f^*(u(x)) = 0$$

这说明 $u^*(f^*) = 0$. 由 u^* 为单射可知 $f^* = 0$，由推论2.1可知 $u(E) = F$.

□

注 1.1. (1) 的证明不严格，回忆 Hilbert 空间中的伴随算子，我们有 $(uv)^* = u^*v^*$，请读者在 Banach 空间中证明这个等式.

1.2. 子空间与商空间的对偶.

1.2.1. 正合列. 第7章中刻画了赋范空间中子空间上连续线性泛函的保范延拓问题，即 Hahn-Banach 延拓定理 (见定理1.2)，用算子的语言可以刻画为：设 F 为 E 的子空间，对任一 $u \in F^*$，存在 $\overline{u} \in E^*$ 使得 $||u|| = ||\overline{u}||$. 我们希望进一步研究空间 F^* 与 E^* 的关系.

回忆代数学中正合列 (参见 [**34**]) 的概念，在域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间范畴 $(\mathbb{K} - \mathcal{VEC}, \mathcal{L})$ 考量，称以下态射链：

$$\cdots \to V_{n+1} \to V_n \to V_{n-1} \to \cdots, \quad V_i \in \mathrm{ob}(\mathbb{K} - \mathcal{VEC}),\ i \in \mathbb{Z}$$

为**正合列**，如果在每个 V_i 处**正合**，即

$$\ker(V_i \to V_{i+1}) = \mathrm{Im}(V_{i-1} \to V_i)$$

其中 $\mathrm{Im}(V_{i-1} \to V_i)$ 表示态射 $V_{i-1} \to V_i$ 的像空间. 特别地，称

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

为**短正合列**，如果在 X, Y, Z 处正合.

练习 1.2. 证明上述短正合列中态射 $X \to Y$ 与态射 $Y \to Z$ 分别为单射与满射.

事实上，我们有最自然的短正合列，设 Y 为 X 的子空间，有商空间 X/Y，命其中元素 (等价类) 为 $[x](= x + Y)$，其中 $x \in X$，于是有商映射

$$\pi : X \to X/Y, \quad x \to [x]$$

我们有最直接的短正合列，即

$$0 \to Y \to X \to X/Y \to 0$$

其中 $Y \to X$ 为自然嵌入，$X \to X/Y$ 为商映射. 若我们还关心范畴 $(\mathbb{K}-\mathcal{VEC}, \mathcal{L})$ 的对偶范畴 $(\mathbb{K}-\mathcal{VEC}, \mathcal{L})^*$(参见 [**34**])，经由对偶函子 $()^*$ 可得对偶的短正合列：

$$0 \leftarrow Y^* \leftarrow X^* \leftarrow (X/Y)^* \leftarrow 0$$

于是我们有如下图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle ()^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle ()^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle ()^*} & & \\
0 & \longleftarrow & Y^* & \longleftarrow & X^* & \longleftarrow & (X/Y)^* & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

1.2.2. 商空间. 上述事实暗示我们可以通过研究商空间来研究子空间的对偶空间. 首先我们定义赋范空间中的商空间.

设 E, F 为赋范空间，F 为 E 的闭向量子空间，定义 X 中等价关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in F$$

定义商集 $E/\sim$ 为 E "商掉" F 的空间，简称**商空间**，记为 E/F. 记其中元素 (等价类) 为

$$[x](=x+F), \quad \forall x \in X$$

其中 $x+F := \{x+y : y \in F\}$. 利用与线性代数中同样的方式定义 E/F 中的代数运算使得其成为向量空间，再定义**范数**

$$||[x]||_{E/F} := \inf\{||y||_E : y \sim x\} = \inf\{||x+y||_E : y \in F\}$$

注意这里的 $||-||_{E/F}$ 确实是一个范数，其中若 $||[x]|| = 0$，存在 $(y_n)_{n\geq 1} \subset F$ 使得 $-y_n \to x$，由 F 为闭子空间可知 $x \in F$，进而 $[x]=0$.

练习 1.3. 验证上述定义的 $||-||_{E/F}$ 是一个范数.

并且可以定义商映射

$$\pi : E \to E/F, \quad x \mapsto [x]$$

练习 1.4. (1) 验证 π 为满射且 $\ker\pi = F$.
(2) 验证 $||\pi|| \leq 1$.
(3) 证明：任取 $[x] \in E/F$，对任意 $\epsilon > 0$，存在代表元 $x(\in E)$ 使得

$$||x|| \leq (1+\epsilon)||[x]||$$

由于 Banach 空间范畴 $(\mathcal{BAN}, \mathcal{LCONTI})$ 为 $(\mathbb{K}-\mathcal{VEC}, \mathcal{L})$ 的子范畴 (见第2章第3节)，我们同样希望在其中研究图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & E \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & E/F \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & 0 \\
0 & F^* \arrow[l] & E^* \arrow[l] & (E/F)^* \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

其中 $()^*$ 函子表示为取 Banach 空间的对偶空间. 回忆第7章第3中定义的零化子与预零化子的概念 (见小小节3.2.2)，即 F, G 分别为 E, E^* 的向量子空间，于是

$$F^\perp = \{x^* \in E^* : x^*(x) = 0, \quad \forall x \in F\}$$

$$G_\perp = \{x \in E : x^*(x) = 0, \quad \forall x^* \in G\}$$

并且命题3.1蕴含

$$F^{\perp}=F^{\circ},\quad G_{\perp}=G^{\circ}$$

其中 $F^{\perp}$ 为 E^* 中 w^*-闭子空间，$G_{\perp}$ 为 E 中 w-闭子空间，等价于范数 $||-||$ 闭性. 并且双极定理 (定理3.1) 是说

$$(F^{\perp})_{\perp}=\overline{F}^{w}=\overline{F}^{||-||},\quad (G_{\perp})^{\perp}=\overline{G}^{w^*}$$

1.2.3. 商空间的对偶. 我们先研究商空间 E/F 的对偶空间 $(E/F)^*$. 从讨论商映射 π 的共轭算子开始考量，为此，任取 $\varphi\in(E/F)^*$，于是 $\varphi(\pi(F))=0$，即 $\varphi\circ\pi\in F^{\perp}$. 因此我们定义

$$\nu:(E/F)^*\to F^{\perp},\quad \varphi\mapsto\varphi\circ\pi$$

练习 1.5. (1) 验证映射 ν 的良定义.
(2) 验证 ν 为商映射 π 的共轭算子，即满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\nu(\varphi)=\varphi\circ\pi"'] & & E/F \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

我们断言，这里的 ν 是一个同构.

定理 1.2 (对偶定理). 映射 $\nu:(E/F)^*\to F^{\perp}$ 是同构，即

$$(E/F)^*\cong F^{\perp}$$

证明. 分以下两步验证.

Step 1 验证 ν 是一个等距嵌入 (蕴含单射). 由共轭算子的性质可知 $||\nu||=||\pi||\leq 1$，这说明

$$||\nu(\varphi)||\leq||\varphi||,\quad \forall\varphi\in(E/F)^*$$

下面说明反向不等式. 任取 $[x]\in E/F$，于是

$$\begin{aligned}||\varphi([x])||&=||\varphi(\pi(x))||\\&=|<\varphi,\pi(x)>|\\&=|<\nu(\varphi),x>|\\&\leq||\nu||\cdot||x||\end{aligned}$$

即 $||\varphi|| \leq ||\nu(\varphi)||$.

Step 2 验证 ν 为满射. 任取 $f \in F^{\perp}$，对任意 $[x] \in E/F$，定义

$$\varphi : E/F \to \mathbb{K}, \quad [x] \mapsto f(x)$$

其中 x 为一代表元. 断言 φ 是良定义的，事实上，若还有 $x' \in E$，于是 $x - x' \in F$，由 $f \in F^{\perp}$ 可知 $f(x - x') = 0$，因此 $f(x) = f(x')$. 显然 φ 是线性的. 同时

$$\varphi([x]) = |f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x||$$

对 $[x]$ 的所有代表元取下确界得到 $|\varphi([x])| \leq ||f|| \cdot ||[x]||$. 因此 $\varphi \in (E/F)^*$ 并且

$$\varphi \circ \pi(x) = \varphi([x]) = f(x), \quad \forall x \in E$$

这说明 $\nu(\varphi) = f$.

$\square$

练习 1.6. 验证上述证明中的 φ 是线性的.

1.2.4. 子空间的对偶. 定义映射

$$\sigma : E^*/F^{\perp} \to F^*, \quad [\varphi] \mapsto \varphi|_F$$

注意到

$$|\sigma([\varphi])(x)| \leq |\varphi(x)| \leq ||\varphi|| \cdot ||x||, \quad \forall x \in F$$

因此上述映射是合理的. 对上述不等式中等价类 $[\varphi]$ 中的代表元取下确界，我们有

$$|\sigma([\varphi])(x)| \leq ||[\varphi]||_{E^*/F^*} \cdot ||x||, \quad \forall x \in F$$

进而

$$\sigma([\varphi]) \in F^*, \quad ||\sigma[\varphi]||_{F^*} \leq ||[\varphi]||_{E^*/F^{\perp}}$$

同时是良定义的，若还有代表元 φ' 于是 $\varphi' - \varphi \in F^{\perp}$，进而

$$(\varphi' - \varphi)(x) = 0, \quad \forall x \in F$$

这说明 $\varphi'|_F = \varphi|_F$.

因此我们得到映射

$$\sigma : E^*/F^* \to F^\perp, \quad [\varphi] \mapsto f = \varphi|_F$$

定理 1.3 (对偶定理). 映射 $\sigma : E^*/F^\perp \to F^*$ 是同构，即

$$E^*/F^\perp \cong F^*$$

证明. 分以下两步证明.

Step 1 σ 是等距嵌入. 对任意 $[\varphi] \in E^*/F^\perp$，于是 $f = \sigma([\varphi]) \in F^*$. 由 Hahn-Banach 定理，存在 E^* 上的保范延拓 $\overline{f}$，即

$$\overline{f}|_F = f, \quad ||\overline{f}|| = ||f||$$

见第7章小小节1.3.2. 由于 $\overline{f}|_F = f = \varphi|_F$，于是 $\overline{f} - \varphi \in F^\perp$，即 $\overline{f}, \varphi \in F^*$. 进而

$$||[\varphi]||_{E^*/F} \le ||\overline{f}||_{E^*} \le ||f||_{F^*} = ||\sigma([\varphi])||_{F^*}$$

因此 $||\sigma([\varphi])|| = ||[\varphi]||$.

Step 2 σ 为满射. 对任意 $f \in F^*$，同样延拓成为 $\overline{f} \in E^*$. 于是

$$[\overline{f}] = f + F^\perp \in E^*/F^\perp, \quad \sigma([\overline{f}]) = \overline{f}|_F = f$$

这说明 σ 为满射.

$\square$

1.2.5. 正合列的对偶. 至此，我们得到如下图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E/F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle ()^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle ()^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle ()^*} & & \\
0 & \longleftarrow & E^*/F^\perp & \longleftarrow & E^* & \longleftarrow & F^\perp & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

其中由对偶定理定理蕴含结果

$$F^* \cong E^*/F^\perp, \quad (E/F)^* \cong F^\perp$$

事实上，我们可以进一步研究二次对偶函子 $()^{**} = ()^* \circ ()^*$(参见 [**34**]) 的作用，即

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & E \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & E/F \arrow[r] \arrow[d, "()^*"] & 0 \\
0 & E^*/F^{\perp} \arrow[l] \arrow[d, "()^*"] & E^* \arrow[l] \arrow[d, "()^*"] & F^{\perp} \arrow[l] \arrow[d, "()^*"] & 0 \arrow[l] \\
0 \arrow[r] & (E^*/F^{\perp})_{\perp} \arrow[r] & E^{**} \arrow[r] & E^{**}/(F^{\perp})_{\perp} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{21}
$$

命题 1.2. 设 $u \in \mathcal{B}(E,F)$，则有

(1) $\mathrm{ker} u^* = u(E)^{\perp}$.

(2) $\mathrm{ker} u = u^*(F^*)_{\perp}$.

(3) $(\mathrm{ker} u^*)_{\perp} = \overline{u(E)}^{w} = \overline{u(E)}^{||-||}$.

(4) $(\mathrm{ker} u)^{\perp} = \overline{u^*(F^*)}^{w^*}$

证明. (3)(4) 分别为 (1)(2) 应用双极定理的推论，留作习题. 下面验证 (1)(2).

(1) 设 $f \in F^*$，则有

$$
\begin{aligned}
f \in \mathrm{ker} u^* &\Longleftrightarrow u^*(f) = 0 \\
&\Longleftrightarrow < u^*(f), x >= 0, \quad \forall x \in E \\
&\Longleftrightarrow < f, u(x) >= 0, \quad \forall x \in E \\
&\Longleftrightarrow f \in u(E)^{\perp}
\end{aligned}
$$

(2) 设 $x \in E$，则有

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{ker} u &\Longleftrightarrow u(x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow < f, u(x) >= 0, \quad \forall f \in F^* \\
&\Longleftrightarrow < u^*(f), x >= 0, \quad \forall f \in F^* \\
&\Longleftrightarrow x \in u^*(F^*)_{\perp}
\end{aligned}
$$

□

练习 1.7. 利用定理3.1证明上述命题的 (3)(4).

结合稠密子空间的判别法 (推论2.1)，可以证明

推论 1.1. 设 $u \in \mathcal{B}(E, F)$，则有

(1) u^* 为单射当且仅当 $u(E)$ 在 F 中稠密.

(2) u 是单射当且仅当 $u^*(F^*)$ 在 E^* 中 w^*-稠密.

2. 自反空间

2.1. 自反空间的定义与例子.

定义 2.1. 设 E 为赋范空间，称 E 为**自反空间**，如果 $E = E^{**}$.

显然，若 E 自反，则 E 为 Banach 空间.

线性代数告诉我们，有限维赋范空间 E 一定是自反的，事实上，我们有**自然同构**

$$E \cong E^{**}$$

参见 [**31, 34**]. 此外，Riesz 表示定理 (定理3.2) 蕴含所有的 Hilbert 空间是自反的. 此外，当 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为 σ-有限测度空间 (见第1章例1.3) 时，其上的 $\mathcal{L}^p$ 空间是自反的，其中 $1 < p < \infty$. 然而，不自反的空间也是大量出现的，例如 $c_0, l^\infty, \mathcal{L}((0,1)), C([0,1])$.

2.2. 自反空间的性质.

命题 2.1. Banach 空间是自反的当且仅当其对偶空间是自反的.

证明. 先证必要性. 若 E 自反，则 $E = E^{**}$. 于是

$$E^* = (E^{**})^* = (E^*)^{**}$$

这说明 E^* 自反.

充分性. 若 E^* 自反，即

$$E^* = (E^*)^{**} = (E^{**})^*$$

对任意 $\varphi \in (E^{**})^* = E^*$ 满足 $\varphi|_E = 0$，即 $\varphi|_{E^{**}} = 0$. 由推论2.1可知 E 在 E^{**} 中稠密，又由 E 的完备性 (蕴含 E 为闭子空间) 可知 $E = E^{**}$. □

练习 2.1. 证明：若 $E \cong F$，则 E 是自反的当且仅当 F 自反.

命题 2.2. 设 F 为 E 的闭子空间，若 E 自反，则 $F, E/F$ 也是自反的.

证明. 验证 E/F 是自反的. 利用图表21，我们有

$$\begin{aligned}(E/F)^{**} = ((E/F)^*)^* &\cong (F^\perp)^* \\ &\cong E^{**}/(F^\perp)_\perp \\ &\cong E/(F^\perp)_\perp \\ &= E/F\end{aligned}$$

其中第一、二个同构 $\cong$ 由于对偶定理，见定理1.2与定理1.3，第三个同构 $\cong$ 由于 E 的自反性，最后一个等号 $=$ 由于双极定理. 子空间的验证是类似的，留给读者补充. □

练习 2.2. 证明上述命题中子空间 F 是自反的.

3. w^*-紧性

3.1. Banach-Alaoglu 定理.

3.1.1. *w^*-拓扑与乘积拓扑.* 我们已经知道弱 * 拓扑 $\sigma(E^*, E)$ 是对偶空间 E^* 上的拓扑，它实际上由半范数族 $\hat{E} = \{\hat{x} : x \in E\}$ 诱导. 规定其中的**开 ϵ-球**为

$$V(x^*; x_1, \cdots, x_n; \epsilon) := \{y^* \in E^* : \max_{1\leq i\leq n} |(y^* - x^*)(x_i)| < \epsilon\}$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 为 E 中有限个元素，于是拓扑 $\sigma(E^*, E)$ 中的开集为上述开球的并. 注意到

$$V(x^*; x_1, \cdots, x_n; \epsilon), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,\ x_1, \cdots, x_n \in E,\ \epsilon > 0$$

构成点 x^* 的邻域基，因此，在该拓扑下，E^* 中的序列 $(x_n^*)_{n\geq 1}$ 收敛于 x^* 当且仅当

$$x_n^*(x) \to x^*(x), \quad \forall x \in E$$

换言之，序列 (x_n^*) 在 w^*-收敛于 x^* 等价于 (x_n^*) 在 E 上逐点收敛于 x^*. 而逐点收敛拓扑等价于乘积拓扑，又注意到 $E^* \subset \mathbb{K}^E$，因此 E^* 上的 w^*-拓扑可被 $\mathbb{K}^E$ 上的乘积拓扑诱导. 我们将在第10章中利用这个事实建立广义函数空间与缓增分布空间的拓扑，见注1.4.

3.1.2. *Banach-Alaoglu 定理.* 下面我们限制在闭单位球 $\overline{B_{E^*}}$ 上讨论，于是 w^*-拓扑由 $\mathbb{K}^E$ 的乘积拓扑在 $\overline{B_{E^*}}$ 上的限制诱导，即 $V(x^*; x_1, \cdots, x_n; \epsilon) \cap \overline{B_{E^*}}$ 为 x^* 的一个 w^*-邻域.

定理 3.1 (Banach-Alaoglu 定理). E^* 中闭单位球 $\overline{B_{E^*}}$ 是 w^*-紧的.

为证明这个定理，我们首先给出两个论断：

(1) $\overline{B_{E^*}}$ 上的 w^*-拓扑由 $\overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}}$ 上的乘积拓扑诱导. 事实上，由于 E^* 中的元素由它们在 E 的闭单位球 $\overline{B_E}$ 上的作用唯一决定，因此可将 E^* 中的元素视为 $\overline{B_E}$ 上的函数，于是

$$\overline{B_{E^*}} = \{x^* \in E^* : |x^*(x)| \leq 1,\ \forall x \in \overline{B_E}\}$$

进而 $\overline{B_{E^*}}$ 中的元素取值于 $\overline{B_{\mathbb{K}}}$，即对应函数

$$x^*|_{\overline{B_E}} : \overline{B_E} \to \overline{B_{\mathbb{K}}}, \quad \forall x^* \in \overline{B_{E^*}}$$

因此 $\overline{B_{E^*}} \subset \overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}}$. 进而 $\overline{B_{E^*}}$ 上的 w^*-拓扑由 $\overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}}$ 上的乘积拓扑诱导. 注意到 $\overline{B_{\mathbb{K}}}$ 为紧集，由 Tychonoff 定理 (见第1章定理1.3) 可知乘积空间 $\overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}}$ 为紧空间. 因而要证明定理，即证明 $\overline{B_{E^*}}$ 为闭集 (注意到紧空间的闭子集为紧集).

(2) 对任意 $\varphi \in \overline{B_{E^*}}$，$\varphi$ 为 $\overline{B_E}$ 上的线性映射，即

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y), \quad \forall x, y \in \overline{B_E},\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

这是显然的. 反过来，若 $\varphi \in \overline{B_E}$，则 $\varphi \in \overline{B_{E^*}}$. 事实上，若有线性映射

$$\psi : \overline{B_E} \to \overline{B_{\mathbb{K}}}$$

可以将其延拓为 E 上的连续线性泛函 (注意此时 ψ 本身是连续的)，为此对任意的 $x \in E$，可选择 $(0 \neq)\lambda \in \mathbb{K}$ 使得 $x/\lambda \in \overline{B_E}$，再令

$$\varphi(x) = \lambda\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

容易验证 φ 不依赖于 λ 的选取且线性，同时 $\varphi|_{\overline{B_E}} = \psi$，进而 $\varphi \in \overline{B_{E^*}}$.

练习 3.1. 验证上述 (2) 中的 φ 不依赖于 λ 的选取以及线性性.

下面我们来证明这个定理.

证明. 证明 $\overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}} - \overline{B_{E^*}}$ 为开集. 为此，任取 $\psi \in \overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}} - \overline{B_{E^*}}$，于是存在 $x, y \in \overline{B_E}$ 以及 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ 满足

$$\lambda x + \mu y \in \overline{B_E}$$

使得

$$\psi(\lambda x + \mu y) \neq \lambda\psi(x) + \mu\psi(y)$$

令 $z = \lambda x + \mu y$，以及 $\overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}}$ 中开邻域

$$\begin{aligned} V &:= V(\psi; x, y, z; \epsilon) \\ &= \{f \in \overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}} : |(f-\psi)(x)| < \epsilon,\ |(f-\psi)(y)| < \epsilon,\ |(f-\psi)(z)| < \epsilon\} \end{aligned}$$

当 ϵ 充分小时，对任意 $f \in V$ 我们有

$$\begin{aligned}|f(z)-\lambda f(x)-\mu f(y)| \geq &|\psi(z)-\lambda\psi(x)-\mu\psi(y)| \\ &-|\lambda|\cdot|(f-\psi)(x)|-|\mu|\cdot|(f-\psi)(y)|-|(f-\psi)(z)|>0\end{aligned}$$

因此 ψ 不可延拓为线性映射，即 $f \in \overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}} - \overline{B_{E^*}}$，进而 $V \subset \overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}} - \overline{B_{E^*}}$，于是 $\overline{B_{\mathbb{K}}}^{\overline{B_E}} - \overline{B_{E^*}}$ 为开集. □

回忆第2章中的 Riesz 定理 (定理1.3)，是说无限维 Banach 空间 E^*(不妨取 E 的对偶空间) 中单位闭球不是紧的；而 Banach-Alaoglu 定理告诉我们，若为 E^* 赋予 w^*-拓扑，其上 w^*-闭单位球是紧球.

3.2. Goldstine 定理.

定理 3.2 (Goldstine). B_E 在 $\overline{B_{E^{**}}}$ 中 w^*-稠密，即

$$\overline{B_{E^*}}^{w^*} = \overline{B_{E^{**}}}$$

证明. 显然有 $\overline{B_{E^*}}^{w^*} \subset \overline{B_{E^{**}}}$，由于 $\overline{B_{E^{**}}}$ 为 E^{**} 中 w^*-闭集 (由定理3.1可知 w^*-紧). 下面验证反向包含，用反证法.

若存在 $x^{**} \in \overline{B_{E^{**}}} - \overline{B_{E^*}}^{w^*}$，回忆第7章中的 Urysohn 引理 (引理2.1)，存在 $\varphi \in E^*$ 使得

$$< x^{**}, \varphi >> 1, \quad \sup\left|\varphi\left(\overline{B_E}^{w^*}\right)\right| \leq 1$$

进而

$$||\varphi||_{E^*} = \sup_{x \in \overline{B_E}} |< \varphi, x >| \leq \sup\left|\varphi\left(\overline{B_E}^{w^*}\right)\right| \leq 1$$

于是

$$||x^{**}|| \geq ||\varphi|| \cdot ||x^{**}|| \geq |\varphi(x^{**})| > 1$$

这与 $x^{**} \in \overline{B_{E^{**}}}$ 矛盾！ □

3.3. E^* 闭单位球的拓扑. 回忆定理3.1，我们知道对偶空间 E^* 中闭单位球必为 w^*-紧球，一个自然的问题是：原空间 E 中的闭单位球 $\overline{B_E}$ 何种情况下在何种拓扑中是紧的？这个问题与空间的自反性有关.

定理 3.3 (Banach). 设 E 为赋范空间，则 $\overline{B_E}$ 为 w-紧球当且仅当 E 为自反空间.

证明. 先证充分性. 由于 $E = E^{**}$，于是 $\overline{B_E} = \overline{B_{E^{**}}}$. 由定理3.1可知 $\overline{B_{E^{**}}}$ 为 w^*-紧的，进而 $\overline{B_E}$ w-紧.

必要性. 显然 $E \subset E^{**}$，于是 $\sigma(E, E^*) = \sigma(E^{**}, E^*)|_E$. 由条件可知 $\overline{B_E}$ w-紧，进而 $\sigma(E^{**}, E^*)$-紧，于是 $\sigma(E^{**}, E^*)$-闭，这说明 $\overline{B_E}$ 为 w^*-闭集，即 $\overline{B_E} = \overline{B_E}^{w^*}$. 由定理3.2可知

$$\overline{B_E} = \overline{B_E}^{w^*} = \overline{B_{E^{**}}}$$

因此 $E = E^{**}$. □

至此, 我们已为对偶空间 E^* 中的闭单位球 $\overline{B_{E^*}}$ 赋予了三种拓扑, 它们对序列收敛的精细程度 (我们将在第9、10章中进一步使用)、空间维数 (有限维与无限维) 与紧致性的关系、赋范空间的自反性等等概念有本质的刻画:

(1) **算子范数**：$(\overline{B_{E^*}}, ||-||)$. 该拓扑下的收敛相对称**强收敛** (见第7章第3节的注记)，依 Riesz 定理，$\overline{B_{E^*}}$ 是紧的当且仅当空间维数有限.

(2) **弱 * 范数**：$(\overline{B_{E^*}}, \sigma(E^*, E))$. 该拓扑下的收敛相对称**弱收敛**，依 Banach-Alaoglu 定理，$\overline{B_{E^*}}$ 总是 w^*-紧的.

(3) **弱范数**：$(\overline{B_{E^*}}, \sigma(E, E^*))$. 依 Banach 定理 (定理3.3)，$\overline{B_{E^*}}$ 是紧的当且仅当 E^* 是自反的 (也当且仅当 E 是自反的，见命题2.1).

习题八

问题 43. 设 E 是赋范空间，并设 E^* 是可分的.

(a) 令 (f_n) 是 E^* 中的稠密子集. 选出 E 中的序列 (x_n) 使得 $f_n(x_n) \geq \frac{\|f_n\|}{2}$.

(b) 任取 $f \in E^*$. 证明：若对每个 x_n 有 $f(x_n) = 0$，则 $f = 0$.

(c) 由此导出 $\operatorname{span}(x_1, x_2, \cdots)$ 在 E 中稠密且 E 是可分的.

(d) 证明：一个 Banach 空间是可分的且自反的当且仅当它的对偶空间是可分的且自反的.

(e) 举一个可分赋范空间但其对偶空间不可分的例子.

问题 44. 设 E 是 Banach 空间，$B \subset E^*$.

(a) 证明：B 是相对 w^*- 紧的当且仅当 B 是有界的.

(b) 假设 B 是有界的且 E 是可分的. 证明：$(\mathrm{B}, \sigma(E^*, E))$ 可度量化. 提示：设 (x_n) 是 E 的闭单位球中的稠密序列，并考虑如下距离

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} |\langle x^* - y^*, x_n \rangle|, \forall x^*, y^* \in B.$$

问题 45. 设 E 是赋范空间，$A \subset E$.

(a) 假设 A 是弱紧的. 证明：A 有界.

(b) 假设 A 有界且 E^* 可分. 证明：$(\mathrm{A}, \sigma(E, E^*))$ 可度量化.

问题 46. 设 P 是 Banach 空间 X 上的线性映射并满足 $P \circ P = P$. 记 $R = P(X)$，$N = \ker P$.

(a) 证明：P 连续的充分必要条件是 R 和 N 都是闭集. 并且，若 P 连续，则 $X = R \oplus N$.

(b) 假设 P 是连续的. 证明：$R^\perp$ 和 $N^\perp$ 在 X^* 中互补，且有 $X^* = R^\perp \oplus N^\perp$.

问题 47. 刻画 ℓ_p 的对偶空间比刻画 L_p 的对偶要容易. 试不用课程中的结论，直接导出

$$\ell_p^* \cong \ell_q, 1 \leq p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

并且证明

$$c_0^* \cong \ell_1.$$

由此导出 c_0, ℓ_1 和 ℓ_∞ 都不是自反的.

问题 48. 本习题将讨论实 Banach 空间 ℓ_∞ 和它的子空间 c_0 和 c 的联系. 这里 c 是由 ℓ_∞ 中的收敛序列构成的闭子空间，而 c_0 是极限为 0 的序列构成的闭子空间. 显然有 $c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell_\infty$. 所有这些空间都赋予上确界范数，也就是 ℓ_∞ 上的范数.

(a) 证明：c 和 c_0 同构. 提示：考虑算子 $u : c \to c_0$：

$$u(x) = (\ell, x_1 - \ell, x_2 - \ell, \cdots, x_n - \ell, \cdots), \quad \text{其中 } \ell = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

由此导出 c_0 上有一个等价范数，在此意义下 c_0 和 c 等距同构.

(b) 证明：ℓ_∞ 既不等距同构于 c_0 也不等距同构于 c.

设 A 是向量空间 E 的非空凸子集. 我们称 $x \in A$ 是 A 的端点，若任取 A 中的点 y 和 z，使得 $x = \frac{y+z}{2}$，则必有 $x = y = z$. 令 $\mathrm{Ext}(A)$ 表示 A 的所有端点构成的集合.

(c) 令 $\bar{B}_c$ 和 $\bar{B}_{c_0}$ 分别表示空间 c 和 c_0 中的闭单位球. 证明 $\mathrm{Ext}(\bar{B}_{c_0})$ 是空集，并确定 $\mathrm{Ext}(\bar{B}_c)$.

由此导出 c 和 c_0 不是等距同构的.

(d) 我们在这一步骤的目的是证明 c^* 和 c_0^* 等距同构. 为此，只需证明 c^* 和 ℓ_1 等距同构. 提示：ℓ_1 中元素 $y = (y_n)_{n\geqslant 1}$ 以如下的方式作用在 c 中的元素 $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ 上：

$$\langle y, x\rangle = y_1\ell + \sum_{n=2}^{\infty} y_n x_{n-1}, \quad \text{其中 } \ell = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(e) 证明：存在 $\varphi \in \ell_\infty^*$ 使得 $\|\varphi\|_{\ell_\infty^*} = 1$，且当 $x \in \ell_\infty$ 满足 $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$ 存在时，有

$$\varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n.$$

刻画 $\varphi|_{c_0}$ 和 $\varphi|_c$. 证明：$\varphi \notin \ell_1$，也就是说，φ 不能由 ℓ_1 中的元素来定义（我们顺便得到 ℓ_1 不是自反的）.

问题 49. 举例说明弱 * 紧集不一定有界

CHAPTER 9

紧算子与谱理论

旨趣. 算子代数与谱理论在泛函分析的研究中有重要的地位. 作为线性代数中线性算子与特征值理论的推广，泛函分析中 (特别指无限维空间) 的算子及其谱理论一方面继承了有限维空间的某些刚性结构，例如紧算子的谱性质 (见命题2.4) 以及 Fredholm 选择定理 (见定理2.1)；另一方面又有其丰富而复杂的性质，例如一般算子的谱在分解上与线性代数有很大的区别. 我们在本章中简要介绍这一类特殊 Banach 代数 $\mathcal{B}(E)$ 上的紧算子理想以及谱理论. 其中具有突出地位的算子当属紧算子，我们将介绍能够用有限秩算子逼近紧算子的空间，以及紧算子的谱性质. 最后，注意到第3章中曾提及 Hilbert 空间具有类似有限维内积空间简单的结构，我们将研究 Hilbert 空间上的自伴紧算子，无独有偶，这类算子很好地继承了有限维空间上实对称矩阵的谱分解性质 (谱分解定理，参见 [**31**])，即 Hilbert 空间可以被其上的自伴紧算子的谱划分成直和，并且其完备正交系恰好与每个直和项的特征向量对应. 这个性质应用于 L^2 空间可以很好地给出 Sturm-Liouville 理论；以及紧区域上 Laplace 算子的谱分解 (我们将在第10章中提及) 甚至流形上的算子谱分解 (这属于谱几何的范畴).

1. 算子代数中的基本概念

本章中为简化记号，默认 E, F 为域 $\mathbb{K}$ 上的 Banach 空间. 我们把映射 $T: E \to F$ 称为 E 到 F 的**算子**，并且本章中默认算子为**线性算子**，即映射 T 是线性的

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \quad \forall x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

此外，由第2章命题2.1，我们说线性算子 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ 是连续算子 (或有界算子).

事实上,在本册的前八章中已经接触到不少具体的算子,例如最基本的有界算子 (上文已经提到) 作为 Banach 空间范畴 $(\mathcal{BAN}, \mathcal{LCONTI})$ 的态射，Hilbert 空间中的投影算子 (见第3章定理2.1)，Hilbert 空间伴随理论中一类特殊的算子 (酉算子，见定理3.3)，研究常微分方程 Cauchy 问题时出现的积分算子 (见第1章小小节2.1.2)(第10章将研究偏微分方程 Sobolev 空间之间的算子以及 Fourier 变换算子) 等等.

1.1. 有限秩算子与紧算子.

下面给出更多特殊算子的定义.

定义 1.1. 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

(1) 称 T 为**有限秩算子**，如果 $\dim T(X) < \infty$. 记全体 X 到 Y 的有限秩算子为 $\mathcal{F}(X, Y)$，特别地，若 $F = E$，则记 $\mathcal{F}(E)$.

(2) 称 T 为**紧算子**，如果 $\mathrm{T}(X)$ 在 Y 中相对紧. 记全体 X 到 Y 的紧算子为 $\mathcal{K}(X, Y)$，特别地，若 $F = E$，则记 $\mathcal{K}(E)$.

特别地，当 $H = X = Y$ 为 Hilbert 空间时，

(1) 称 T 为**正规算子**，如果 $TT^* = T^*T$；特别地，称 T 为**酉算子**，如果 $TT^* = T^*T = I$.

(2) 称 T 为**自伴算子**，如果 $T = T^*$；特别地，称 T 为正算子，如果还满足 $< Tx, x > \geq 0$, $\forall x \in H$.

此外，若不满足条件 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$，我们称 T 为**无界算子**.

本节主要讨论有限秩算子与紧算子.

注 1.1. (1) 回忆第2章，我们知道 $\mathcal{B}(E)$ 成为 Banach 代数，记 $\mathrm{GL}(E)$ 为 $\mathcal{B}(E)$ 中全体可逆算子构成的集合，在算子乘法

意义下成为群. 事实上 GL(E) 为 $\mathcal{B}(E)$ 中开集 (注意拓扑由算子范数 $||-||$ 诱导).

(2) 若算子 T 连续，由第2章的命题2.1可知 $T(X)$ 有界，若还有 $\dim T(X)<\infty$，进而可知 $T(E)$ 为相对紧集，这说明有限秩算子一定是紧算子.

(3) 一般紧算子的定义中不需要算子连续的条件, 事实上由 $T(X)$ 的相对紧性，可知其闭包有界，进而 T 在单位球上有界，于是 T 自动成为连续算子. 因此

$$\mathcal{F}(X,Y)\subset\mathcal{K}(X,Y)\subset\mathcal{B}(X,Y)$$

(4) 若 $T\in\mathcal{K}(X,Y)$，则对 X 中任一有界子集 A，都有 $T(A)$ 为相对紧集.

练习 1.1. 验证上述 (1) 中的论断.

练习 1.2. 证明: $\mathcal{F}(X,Y),\mathcal{K}(X,Y)$ 为 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的向量子空间; 特别地, 若 $Y=X$(此时 $\mathcal{B}(X)$ 是一个 $\mathbb{K}$-代数), 则 $\mathcal{F}(X),\mathcal{K}(X)$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 的双边理想 (参见 [**34**]).

回忆第8章中共轭算子的概念 (见定理1.1)，算子的紧性可以由其共轭等价刻画.

命题 1.1. 设 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$, 则 T 为紧算子当且仅当 T^* 为紧算子.

证明. 先证必要性. 设 T 是紧算子. 任取 $(x_n^*)\subset T^*(B_F{}^*)$，则有 $(y_n^*)\subset B_{F^*}$，使得 $T^*(y_n^*)=x_n^*$. 注意 y_n^* 可以看成是 $T(B_E)$ 上的函数, 当任取 $y,y'\in T(B_E)$ 时，有

$$|(y_n^*,y-y')|\leq\|y_n^*\|\|y-y'\|\leq\|y-y'\|$$

这意味着 (y_n^*) 在 $T(B_E)$ 上等度连续. 同时对任意 $y\in T(B_E)$ 也有 $|(y_n^*,y)|\leq\|y\|$. 由于 $T(B_E)$ 是紧空间，由 Ascoli 定理 (见第5章定理1.1)，(y_n^*) 具有在 $T(B_E)$ 上一致收敛的子列 $(y_{n_k}^*)$. 那么对任意 k,j,

有

$$
\begin{aligned}
\|x^*_{n_k} - x^*_{n_j}\| &= \sup_{x\in B_E} |x^*_{n_k}(x) - x^*_{n_j}(x)| \\
&= \sup_{x\in B_E} |< T^*(y^*_{n_k}), x > - < T^*(y^*_{n_j}), x >| \\
&\leq \sup_{T(x)\in T(B_E)} |< y^*_{n_k}, T(x) > - < y^*_{n_j}, T(x) >|
\end{aligned}
$$

于是可得 $(x^*_{n_k})$ 是 E^* 中的 Cauchy 列，由 E^* 的完备性可知 $(x^*_{n_k})$ 在 E^* 中收敛，从而 $T^*(B^*_E)$ 是相对紧的.

再证充分性. 设 T^* 是紧算子. 由必要性的讨论可得 T^{**} 是从 E^{**} 到 F^{**} 的紧算子，也就是说 $T^{**}(B_{E^{**}})$ 是相对紧的. 从而 $T^{**}(B_E)$ 也是相对紧的，进而 $T(B_E)$ 是相对紧的. $\square$

1.2. 逼近性质. 依定义我们知道有限秩算子的结构是简单的，利用 Riesz 定理 (见第2章定理1.3) 容易证明 $\mathcal{F}(E)$ 是 Banach 代数 $\mathcal{B}(E)$ 稠密理想当且仅当 $\dim E < \infty$；由包含关系显然有 $\overline{\mathcal{F}(E)} = \mathcal{K}(E)$，换言之，有限维 Banach 空间上的有限秩算子可以 (强) 逼近紧算子，这里的“强”逼近指的是算子范数 $||-||$ 意义下收敛. 是否所有的 Banach 空间上的有限秩算子都能逼近紧算子？答案是否定的，我们称满足

$$\overline{\mathcal{F}(E)} = \mathcal{K}(E)$$

条件的空间为具有**逼近性质**的空间，其中全体 Hilbert 空间具有逼近性质，参见 [**32**]，$\mathcal{L}^p$ 空间具有逼近性质，当 X 为 LCH 空间时 $C_0(X)$ 具有逼近性质.

注 1.2. 1973 年 Enflo 构造了一个可分但不具有逼近性质的空间反例 $\mathcal{B}(l^2)$，参见 Enflo, Per. ”A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.” (1973): 309-317..

2. 谱理论简介

2.1. 有界算子的谱.

2.1.1. 算子谱的定义. 回忆线性代数中有限维线性空间 X 到自身的线性算子的特征值与特征向量，参见 [**31**]，我们把这个概念推广到 Banach 空间上的线性算子，即研究 Banach 代数 $\mathcal{B}(E)$ 的谱理论.

定义 2.1. 设 $T \in \mathcal{B}(E)$，

(1) 称 $\mathrm{spec}T$ 为算子 T 的**谱集**，如果

$$\mathrm{spec}T := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T\text{不可逆}\}$$

且称 $\mathrm{cspec}T := \mathbb{K} - \mathrm{spec}T$ 为算子 T 的**预解集**.

(2) 对任意 $\lambda \in \mathrm{cspec}T$，称逆算子 $R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}$ 为算子 T 的**预解式**，此时称 λ 为正则点.

此外，我们还可以对算子 T 的谱集分类，注意到 $\lambda - T$ 若不可逆，那么

不是单射： 称 $\lambda(\in \mathrm{spec}T)$ 为算子 T 的**特征值**，如果 $\lambda - T$ 不是单射，即存在 $(0 \neq)x \in E$ 使得 $Tx = \lambda x$；且称 $\ker(\lambda - T)$ 为 T 关于特征值 λ 的**特征子空间**，并称这个非零的向量 x 为从属于 λ 的**特征向量**. 我们用 $\mathrm{spec}_p T$ 表示 T 所有特征值构成的集合，称**点谱集**.

是单射但不是满射：
(a) 称 λ 为连续点，如果 $(\lambda - T)(E)$ 在 E 中稠密，用 $\mathrm{spec}_c T$ 表示全体连续点构成的集合，称为**连续谱集**.
(b) 此外，称剩余的 λ 为剩余点，用 $\mathrm{spec}_r T$ 表示全体剩余点构成的集合，称为**剩余谱集**.

显然有分解：

$$\mathrm{spec}T = \mathrm{spec}_p T \sqcup \mathrm{spec}_c T \sqcup \mathrm{spec}_r T$$

命题 2.1 (预解方程). 对任意 $\lambda, \mu \in \mathrm{cspec}T$，我们有

$$(\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) = R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\mu, T)R(\lambda, T)$$

练习 2.1. 证明上式命题.

注 2.1. 这个命题说明预解式可交换，即

$$R(\lambda,T)R(\mu,T)=R(\mu,T)R(\lambda,T),\quad \forall\lambda,\mu\in \mathrm{cspec}T$$

这个结果也可以被如下事实蕴含：

$$(\lambda-T)(\mu-T)=\lambda\mu-(\lambda+\mu)T+T^2=(\mu-T)(\lambda-T),\quad \forall\lambda,\mu\in \mathrm{cspec}T$$

实际上，对上式两边取逆即可.

线性代数中的秩-零 (rank-null) 定理 (参见 [**31**]) 告诉我们，有限维空间 E 上的线性算子单射当且仅当满射，因此对有限维空间的 Banach 代数 $\mathcal{B}(E)$ 有最简单的谱集分解，任取 $T\in\mathcal{B}(E)$ 我们有

$$\mathrm{spec}_pT=\mathrm{spec}T$$

但一般情况下只有严格的包含关系，即 $\mathrm{spec}_pT\subset\mathrm{spec}T$. 我们将在下一小节中证明紧算子的 Fredholm 选择定理 (见定理2.1), 即对 Banach 空间上的紧算子 T 而言，$\lambda-T$ 为单射当且仅当满射. 这说明紧算子的谱集分解与有限维空间一样是简单的 (或由命题2.4的 (5))，换言之，利用点谱集 (特征值与特征向量) 理论可以刻画清楚紧算子完整的谱集，因此直观上可以将紧算子视为有限阶矩阵.

2.1.2. *谱半径*. 下面我们再介绍算子的谱半径.

命题 2.2. 设 $T\in\mathcal{B}(E)$，则

(1) 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}=:r(T)$$

且满足

$$\lim_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}=\inf_{n\geq 1}||T^n||^{1/n}$$

我们称 $r(T)$ 为算子 T 的**谱半径**.

(2) 谱集 $\mathrm{spec}T$ 为 $\mathbb{K}$ 中紧集，且 $\mathrm{spec}T\subset\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|\leq r(T)\}$.

证明. (1) 记 $a=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}||T^n||^{1/n}$. 首先我们有

$$\liminf_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}>\inf_{n\in\mathbb{N}^*}||T^n||^{1/n}=a$$

接下来，我们讨论 $\limsup_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}$ 的值. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\geq 1$，使得 $||T^{n_0}||^{\frac{1}{n_0}}<a+\varepsilon$. 对每个 $n>n_0$，记 $n=q(n)\cdot n_0+r(n)$，这里 $q(n)\in\mathbb{N}^*, r(n)<n_0$. 那么

$$||T^n||^{1/n}\leq||T^{q(n)\cdot n_0+r(n)}||^{1/n}\leq||T^{n_0}||^{\frac{1}{n_0}\cdot\frac{q(n)\cdot n_0}{n}}||T||^{\frac{r(n)}{n}}$$

当 $n\to\infty$ 时，有 $\frac{q(n)\cdot n_0}{n}\to 1$ 和 $\frac{r(n)}{n}\to 0$. 于是有

$$\limsup_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}\leq\limsup_{n\to\infty}||T^{n_0}||^{\frac{1}{n_0}\cdot\frac{q(n)\cdot n_0}{n}}||T||^{\frac{r(n)}{n}}\leq a+\varepsilon$$

由于 ε 的任意性,可得 $\limsup_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}\leq a\leq\liminf_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}$.

(2) 先证谱集 $\mathrm{spec}(T)\subset\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|\leq r(T)\}$. 设有 $|\lambda|>r(T)$，则由 $r(T)=\lim_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}$，可取某个常数 $0<c<1$，相应地存在 $n_0\geq 1$，使得当 $n\geq n_0$ 时，有 $||T^n||^{1/n}\leq c|\lambda|$，于是有 $||(\frac{T}{\lambda})^n||\leq c^n$. 从而可得级数 $S=\sum_{n\geq 0}(\frac{T}{\lambda})^n$ 在 $B(E)$ 中依范数收敛，并且

$$(\lambda-T)S=(\lambda-T)\sum_{n\geq 0}(\frac{T}{\lambda})^n=\lambda$$

故 $\lambda-T$ 可逆，也就有 $\lambda\notin\mathrm{spec}(T)$.

再来证明预解集 $\mathrm{cspec}(T)=\mathbb{K}\setminus\mathrm{spec}(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的开集. 为说明该结论成立，我们建立如下映射

$$f:\mathbb{K}\longrightarrow B(E),\quad \lambda\longmapsto\lambda-T$$

显然 f 连续. 由 $\mathrm{GL}(E)$ 为 $\mathrm{B}(E)$ 中开集，而 $\mathrm{cspec}(T)=f^{-1}(GL(E))$, 故 $\mathrm{cspec}(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的开集. 由以上结论可知谱集 $\mathrm{spec}(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的有界闭集，故是 $\mathbb{K}$ 中的紧集.

□

事实上，我们有对谱半径更直观的刻画，即非正则点集的上确界(由定理2.1，对紧算子而言是特征值集的上确界).

命题 2.3. 设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 以及 $T\in\mathcal{B}(E)$，则 $\mathrm{spec}T$ 非空且

$$r(T)=\sup_{\lambda\in\mathrm{spec}T}|\lambda|$$

证明. 对给定的 $T \in B(E)$，我们记

$$R(\lambda) = R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}, \quad \forall \lambda \in \mathrm{cspec}(T)$$

可以证明 $GL(E) \to GL(E)$，$u \mapsto u^{-1}$ 是连续的，留作习题，进而 $R : \mathrm{cspec}(T) \to GL(E)$ 也连续. 任取 $\xi \in B(E)^*$，再构造函数

$$\varphi : \mathrm{cspec}(T) \to \mathbb{C}, \quad \varphi(\lambda) = \xi(R(\lambda)),\ \lambda \in \mathrm{cspec}(T)$$

则 φ 是 $\mathrm{cspec}(T)$ 上的连续函数.

断言 φ 还是全纯的. 事实上, 对任意 $\lambda_0 \in \mathrm{cspec}(T)$, 令 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R(\lambda_0)||}$，则有

$$\begin{aligned}(\lambda - T)^{-1} &= (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - T)^{-1} \\ &= (\lambda_0 - T)^{-1}[1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - T)^{-1}]^{-1} \\ &= R(\lambda_0) \sum_{n \geq 0} (-1)^n R(\lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n R(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n.\end{aligned}$$

在 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R(\lambda_0)||}$ 条件下，我们有 $||(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - T)^{-1}|| < 1$. 回忆第2章的定理2.2，上面的级数在 $B(E)$ 中绝对收敛. 从而

$$\varphi(\lambda) = \xi((\lambda - T)^{-1}) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \xi(R(\lambda_0)^{n+1})(\lambda - \lambda_0)^n$$

至少在 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R(\lambda_0)||}$ 时成立. 由于 λ_0 是在 $\mathrm{cspec}(T)$ 中任意选取的，故 φ 在 $\mathrm{cspec}(T)$ 中是全纯的.

另一方面，当 $|\lambda| > ||T||$ 时，我们有

$$R(\lambda) = (\lambda - T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

该级数在 $B(E)$ 上绝对收敛. 则有

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

那么

$$|\varphi(\lambda)| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{|\xi(T^n)|}{\lambda^{n+1}} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{||\xi|| ||T||^n}{\lambda^{n+1}} = \frac{||\xi||}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - ||T||/|\lambda|}$$

下面证明 $\mathrm{spec}(T)\neq\varnothing$. 当 $\lambda\to\infty$ 时，有 $\varphi(\lambda)\to 0$. 如果 $\mathrm{cspec}(T)=\mathbb{C}$，那么由全纯函数的 Liouville 定理 (参见 [**10**])，φ 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上有 $\varphi\equiv 0$. 特别地，取 $\lambda>||T||$，由命题2.2的 (2) 知此时 $(\lambda-T)^{-1}$ 存在. 因此对任意的 ξ，我们有 $\xi((\lambda-T)^{-1})=0$. 但由 Hahn-Banach 定理 (见第7章定理1.2)，总存在某个 $\xi\in B(E)^*$，使得 $\xi((\lambda-T)^{-1})\neq 0$，矛盾. 故 $\mathrm{spec}(T)\neq\varnothing$.

最后证明 $r(T)=\sup_{\lambda\in\mathrm{spec}(T)}|\lambda|$. 记 $\alpha=\sup_{\lambda\in\mathrm{spec}(T)}|\lambda|$，由命题2.2的 (2)，可得 $r(T)\geq\alpha$，故只需证明 $r(T)\leq\alpha$. 取 $|\lambda|>\alpha$，则 $\lambda\in\mathrm{cspec}(T)$，故上面的 $\varphi(\lambda)$ 在 $\{\lambda:|\lambda|>\alpha\}$ 上也全纯. 从而级数

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n\geq 0}\frac{\xi(T^n)}{\lambda^{n+1}}$$

绝对收敛. 由此可得 $\sup_{\lambda\in\mathrm{spec}(T)}|\xi(T^n)|^{\frac{1}{|\lambda|^{n+1}}}<\infty$. 我们记算子 $B_n=\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$，显然 $B_n\in B(E)$. 运用 Banach 空间的对偶理论 (见第8章)，把 B_n 看成 $B(E)^*$ 上的连续线性泛函，$\sup_{\lambda\in\mathrm{spec}(T)}|\xi(T^n)|^{\frac{1}{|\lambda|^{n+1}}}<\infty$ 意味着 B_n 作用在每个 $\xi\in B(E)^*$ 上都是有界的. 根据 Banach-Steinhaus 定理 (见第6章定理2.1)，可知 $(||B_n||)_{n\geq 1}$ 有界. 记 $M=\sup_n||B_n||$，于是有

$$||T^n||^{1/n}\leq M^{1/n}|\lambda|^{1+1/n}$$

两边取极限，可得 $\lim_{n\to\infty}||T^n||^{1/n}\leq|\lambda|$. 由于 $|\lambda|>\alpha$ 是任意的，则有 $r(T)\leq\alpha$. □

练习 2.2. 验证上述证明中 $GL(E)\to GL(E)$, $u\mapsto u^{-1}$ 是连续的.

2.2. 紧算子的谱性质. 下面我们来给出紧算子的谱的刻画.

命题 2.4. 设 $T\in\mathcal{K}(E)$，以及 $(0\neq\lambda)\in\mathbb{K}$，则

(1) 对任意 $n\in\mathbb{N}$，$\dim\ker(\lambda-T)^n$ 是有限维的.
(2) 对任意 $n\in\mathbb{N}$，$\dim\ker(\lambda-T)^n$ 是闭集.
(3) 存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\ker(\lambda-T)^{n+1}=\ker(\lambda-T)^n$.
(4) 存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $(\lambda-T)^{n+1}=(\lambda-T)^n$.
(5) 任取 $(0\neq)\lambda\in\mathrm{spec}T$，必有 $\lambda\in\mathrm{spec}_pT$. 若 $\dim E=\infty$，则必有 $0\in\mathrm{spec}_pT$.

(6) 算子 T 的非零特征值最多可数个，从而 $\mathrm{spec}_p T$ 为至多可数集. 特别地，$\mathrm{spec} T$ 是紧集. 记所有特征值为序列 $(\lambda_n)_{n\geq 1}$，则当 $\mathrm{spec}_p T$ 为无限集时，$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$.

证明. (1) 记 $K_n = \ker(\lambda - T)^n$,$K_n$ 是 E 的闭向量子空间. 首先注意 K_n 是关于 T 的不变子空间，即 $T(K_n)\subset K_n$，这是因为任取 $x\in K_n$，有

$$(\lambda - T)^n(T(x)) = (\lambda^n T - \lambda^{n-1}T^2 + \cdots + (-1)^n T^{n+1})(x) = T((\lambda - T)^n(x)) = 0$$

接下来，我们记 $S = \lambda^{n-1}T - \cdots - (-1)^n T^n$，则 $(\lambda^n - S)|_{K_n} = (\lambda - T)^n|_{K_n} = 0$. 那么 $I_{K_n} = \frac{1}{\lambda^n}S|_{K_n}$. 并且由 $T\in\mathcal{K}(E)$，可得 $S\in\mathcal{K}(E)$，因此 I_{K_n} 是紧算子. 根据 Riesz 定理，则可知 $\dim K_n < \infty$.

(2) 设 $H_n = (\lambda - T)^n(E)$. 首先考虑 $n = 1$ 的情形. 因 $\dim K_1 < \infty$，故存在 E 的闭向量子空间 F_1，使得 $E = K_1 \oplus F_1$. 那么可得 $H_1 = (\lambda - T)(F_1)$，且 $(\lambda - T)|_{F_1} : F_1 \to H_1$ 是连续线性双射. 由此，证明 H_1 是闭的等价于证明 $(\lambda - T)|_{F_1}$ 的逆映射是连续的.

假设 $(\lambda - T)|_{F_1}$ 的逆映射不连续，则存在序列 $(x_n)_{n\geq 1}\subset F_1$，满足 $||x_n|| = 1$ 且 $\lim_{n\to\infty}(\lambda - T)(x_n) = 0$. 由于 T 是紧算子，则存在 $(x_n)_{n\geq 1}$ 的子序列 (x_{n_k})，使得 $(T(x_{n_k}))$ 收敛. 于是 (λx_{n_k}) 也收敛，并由 $\lambda\neq 0$ 可知 (x_{n_k}) 收敛于某个向量 $x\in E$. 因 F_1 是 E 的闭子空间，故 $x\in F_1$. 此时

$$(\lambda - T)(x) = \lim(\lambda - T)(x_{n_k}) = 0$$

这意味着 $x\in K_1$，与 $x\in F_1$ 矛盾. 故 H_1 是闭的.

当 $n\geq 2$ 时，假设 H_n 是 E 的闭子空间，则 H_n 完备，而

$$H_{n+1} = (\lambda - T)^{n+1}(E) = (\lambda - T)(H_n) = (\lambda - T)|_{H_n}(E)$$

注意，H_n 也是关于算子 T 的不变子空间，即 $T(H_n)\subset H_n$. 再由 $T|_{H_n}$ 是紧算子以及 $\dim K_n < \infty$，类似前面 $n = 1$ 的证明过程可得 H_{n+1} 是闭的. 根据数学归纳法可知结论成立.

(3) 显然有

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \cdots$$

假设上面所有的包含关系是严格的. 那么对每一个 $n \geq 1$，存在 $x_n \in K_{n+1}$，满足 $||x_n|| = 1$ 且 $d(x_n, K_n) \geq \frac{1}{2}$. 对任意 $1 \leq n < m$，有

$$Tx_m - Tx_n = Tx_m - \lambda x_m + \lambda x_m - \lambda x_n + \lambda x_n - Tx_n = \lambda x_m + (T-\lambda)(x_m) + (\lambda - T)(x_n) - \lambda x_n.$$

令 $y = (\lambda - T)(x_m) + (T - \lambda)(x_n) + \lambda x_n$. 则 $y \in K_m$. 再由 x_m 的选取可得

$$||Tx_m - Tx_n|| = ||\lambda x_m - y|| = \lambda \left| |x_m - \frac{1}{\lambda} y \right| | \geq \frac{\lambda}{2}$$

所以 (Tx_n) 不可能有收敛子列，这与 T 是紧算子矛盾.

(4) 直接由 (3) 的结论可得. 存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\ker(\lambda - T^*)^{n+1} = \ker(\lambda - T^*)^n$. 于是由双极定理 (见第7章定理3.1) 可得 $\overline{(\lambda - T)^{n+1}(E)}^{||\cdot||} = \overline{(\lambda - T)^n(E)}^{||\cdot||}$. 又因对任意 $n \geq 1$, $(\lambda - T)^n(E)$ 都是闭的, 故结论成立.

(5) 任取 $\lambda \neq 0$, 假设 $\lambda - T$ 是单射. 由命题 (4), 存在 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$(\lambda - T)^{n+1}(E) = (\lambda - T)^n(E)$$

那么对任意 $x \in E$, 存在 $y \in E$, 使得 $(\lambda - T)^n(x) = (\lambda - T)^{n+1}(y)$. 由于 $(\lambda - T)^n$ 是单射，则 $x = (\lambda - T)(y)$, 故 $\lambda - T$ 是满射. 根据开映射定理 (见第6章定理3.1)，$\lambda - T$ 是同构映射. 因此, 若 λ 不属于 $\mathrm{spec}_p(T)$, 则 λ 不属于 $\mathrm{spec}(T)$.

(6) 只需证明：对任意 $\delta > 0$, 仅存在有限多的 $\lambda \in \mathrm{spec}(T) - \{0\}$, 使得 $|\lambda| \geq \delta$.

反证法. 假设存在 $\delta > 0$ 以及元素两两不同的无穷序列 $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathrm{spec}_p(T)$, 且对每个 n，有 $|\lambda_n| \geq \delta$. 由于 λ_n 是特征值，存在单位特征向量 e_n，使得 $T(e_n) = \lambda_n e_n$. 因而对任意给定的 n，向量组 $(e_1, \cdots, e_n)$ 线性无关.

设 $E_n = \mathrm{span}(e_1, \cdots, e_n)$. 则

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$$

注意以上包含关系是严格的，并且 E_n 是 E 的闭子空间. 我们可以选择单位向量 $y_n \in E_{n+1}$，使得 $d(y_n, E_n) \geq \frac{1}{2}$. 设 $1 \leq n < m$, 则有 $(T-\lambda_{n+1})(y_n) \in E_n \subset E_m$.

$$\begin{aligned} T(y_m) - T(y_n) &= (T-\lambda_{m+1})(y_m) + \lambda_{m+1} y_m - \lambda_{n+1} y_n - (T-\lambda_{n+1})(y_n) \\ &= \lambda_{m+1} y_m - \lambda_{n+1} y_n + (T-\lambda_{m+1})(y_m) - (T-\lambda_{n+1})(y_n) \\ &= \lambda_{m+1} \left\{ y_m - \frac{1}{\lambda_{m+1}} [\lambda_{n+1} y_n - (T-\lambda_{m+1})(y_m) + (T-\lambda_{n+1})(y_n)] \right\}. \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{\lambda_{n+1}}[\lambda_{n+1} y_n - (T-\lambda_{m+1})(y_m) + (T-\lambda_{n+1})(y_n)] \in E_m$，那么

$$||T(y_m) - T(y_n)|| \geq |\lambda_{m+1}| d(y_m, E_m) \geq \frac{1}{2}\delta$$

因此，$(T(y_n))$ 没有收敛子列，这与 T 是紧算子矛盾!

□

进而我们得到以下紧算子的刻画:

定理 2.1 (Fredholm). 设 $T \in \mathcal{K}(E)$，则 $\lambda - T$ 是单射当且仅当满射，其中 $(0 \neq)\lambda \in \mathbb{K}$.

3. Hilbert 空间上的自伴紧算子

本节中我们研究 Hilbert 空间上的自伴紧算子 (见定义1.1)，这里默认 H 为 Hilbert 空间，T^* 表示 Hilbert 空间上有界算子 T 的伴随算子 (见第3定理3.3).

3.1. 自伴算子与正算子.

练习 3.1. 回忆第3章定理3.3，证明：

(1) 当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，则 T 是自伴的当且仅当 $<Tx,x>\in\mathbb{R}$, $\forall x\in H$.

(2) 当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，则 T 是正算子当且仅当 $<Tx,x>\geq 0$, $\forall x\in H$.

正算子的算子范数可以被刻画为

$$||T||=\sup\{<Tx,x>: x\in H,\ ||x||=1\}$$

事实上，由 Cauchy-Schwartz 不等式 (见第3章定理1.1) 可知

$$|<Tx,y>|^2\leq <Tx,x><Ty,y>,\quad \forall x,y\in H$$

进而映射 $H\times H\to H\times H$, $(x,y)\mapsto (Tx,y)$ 的范数等价于映射 $H\to H$, $x\to Tx$ 的范数.

对于一般的自伴算子，我们有类似的刻画，并且算子范数与谱半径有联系.

定理 3.1. 设 T 为 H 上的自伴算子，且令

$$m=\inf\{<Tx,x>: x\in H,\ ||x||=1\},\quad M=\sup\{<Tx,x>: x\in H,\ ||x||=1\}$$

则有

(1) $r(T)=||T||=\max\{|m|,|M|\}=\max_{\lambda\in\mathrm{spec}T}|\lambda|$.

(2) $\mathrm{spec}T\subset[m,M]$，其中 $m,M\in\mathrm{spec}T$.

证明. (1) 先证明 $r(T)=||T||$. 由 $T^*=T$ 可得

$$||Tx||^2=<Tx,Tx>=<x,T^*Tx>\leq ||T||^2||x||^2,\quad \forall x\in H$$

由此得出 $||T||\leq ||T2||^{1/2}$，而显然有 $||T^2||\leq ||T||^2$，于是可得 $||T||=||T2||^{1/2}$. 此过程可得

$$||T||=\left|\left|T^{2^n}\right|\right|^{1/2^n},\quad n\geq 1$$

再根据谱半径的定义，我们得到 $r(T)=||T||$.

接下来我们记 $\alpha := \sup\{|<Tx,x>|: x\in H,\ ||x||=1\}$. 不等式 $\alpha<||T||$ 是显然的，我们只需证明反向不等式. 首先，对任意 $(0\neq)x\in H$，有

$$|<Tx,x>|=||x||^2\left|\left\langle T\left(\frac{x}{||x||}\right),||x||\right\rangle\right|\leq \alpha||x||^2$$

因此对于任意 $x,y\in H$ 以及任意 $\lambda\in\mathbb{K}$，有

$$|<T(x\pm\lambda y),x\pm\lambda y>|\leq\alpha||x+\lambda y||^2$$

由上面的不等式和平行四边形公式 (见第3章定理1.2)，可得

$$\begin{aligned}&|<T(x+\lambda y),x+\lambda y>-<T(x-\lambda y),x-\lambda y>|\\&\leq\alpha\left(||x+\lambda y||^2+||x-\lambda y||^2\right)\\&=2\alpha\left(||x||^2+|\lambda|^2||y||^2\right)\end{aligned}$$

然而

$$<T(x+\lambda y),x+\lambda y>-<T(x-\lambda y),x-\lambda y>=4\overline{\lambda}\mathrm{Re}<Tx,y>$$

于是有

$$2|\mathrm{Re}\lambda(Tx,y)|\leq\alpha\left(||x||^2+|\lambda|^2||y||^2\right)$$

现在利用 λ 的任意性，取 $\lambda=\mathrm{sgn}\overline{<Tx,y>}$，可以得到

$$|<Tx,y>|\leq\frac{1}{2}\alpha(||x||^2+||y||^2)$$

因此

$$||T||=\sup_{||x||\leq1}\sup_{||y||\leq1}|<Tx,y>|\leq\alpha$$

(2) 若 $\lambda\notin[m,M]$，记 $d(\lambda):=d(\lambda,[m,M])$. 由 m 和 M 的定义，当 $||x||=1$ 时可得

$$|<(\lambda-T)x,x>|=|\lambda-<Tx,x>|\geq d(\lambda)$$

那么对任意 $x\in H$，可得

$$d(\lambda)||x||^2\leq|<(\lambda-T)x,x>|\leq||(\lambda-T)x||\cdot||x||$$

也就有

$$d(\lambda)||x|| \leq ||(\lambda - T)x||$$

因此，$\lambda - T$ 是单射．注意这里 $d(\lambda) > 0$，并且也可得到 $(\lambda - T)(H)$ 是闭的，则

$$(\lambda - T)(H) = \overline{(\lambda - T)(H)} = \ker(\lambda - T)^{\perp}$$

由 T 是自伴算子，故 $\overline{\lambda} - T^* = \overline{\lambda} - T$．又由于 $\lambda \notin [m, M]$，于是 $\overline{\lambda} \notin [m, M]$，进而 $\overline{\lambda} - T$ 为单射．因此 $\ker(\overline{\lambda} - T) = \{0\}$．于是可得 $(\lambda - T)(H)$ 在 H 中稠密，进而 $(\lambda - T)(H) = H$．由此我们知道 $\lambda \in \mathrm{cspec}T$，即证明了 $\mathrm{spec}T \subset [m, M]$.

下面证 $m \in \mathrm{spec}(T)$．由 m 的定义，可知存在 H 中的序列 (x_n)，$||x_n|| = 1$，使得 $m = \lim_{n\to\infty} < Tx_n, x_n >$．于是

$$\lim_{n\to\infty} < (T-m)x_n, y >= \lim_{n\to\infty} < Tx_n, x_n) - m = 0$$

容易验证 $T - m$ 是正算子，则根据正算子对应的 Cauchy-Schwarz(见上文) 不等式，对任意 $y \in H$，

$$| < (T-m)z_n, y > | \leq < (T-m)x_n, x_n)^{1/2} >< (T-m)y, y >^{1/2}$$

在上式两边关于 $||y|| \leq 1$ 取上确界，可得

$$||(T-m)x_n|| \leq < (T-m)x_n, x_n >^{1/2} ||T-m||^{1/2}$$

这意味着当 $n \to \infty$ 时，$||(T-m)x_n|| \to 0$，但 $||x_n|| = 1$．由此可知 $T - m$ 不可逆，即证明 $m \in \mathrm{spec}(T)$．类似地考虑正算子 $M - T$，可证 $M \in \mathrm{spec}(T)$.

□

推论 3.1. 设 T 是 H 上的自伴算子，则 T 是正算子当且仅当 $\mathrm{spec}(T) \subset [0, \infty)$．并且若 T 是正算子，则 $||T|| \in \mathrm{spec}(T)$.

证明. 若 T 是正算子，则对任意 $x \in H$，$< Tx, x >\geq 0$．进而

$$m = \inf\{< Tx, x >: x \in H,\ ||x|| = 1\} \geq 0$$

因此，$\mathrm{spec}(T) \subset [0, \infty)$．另一方面，若 $\mathrm{spec}(T) \subset [0, \infty)$，则 $m \geq 0$．那么对任意 $x \in H$，有 $< Tx, x >\geq 0$．因此 T 是正算子.

此外，若 T 是正算子，由定理3.1的 (1)，得

$$||T|| = \sup\{(Tx,x) : x \in H, ||x|| = 1\} = M \in \mathrm{spec}(T)$$

□

推论 3.2. 设 T 是 H 上的自伴紧算子，则存在 T 的特征值 λ 使得 $|\lambda| = ||T||$.

证明. 由定理3.1的 (2), $||T|| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{spec}(T)\}$. 由命题2.4, 对任意 $\lambda \in \mathrm{spec}(T) - \{0\}$，$\lambda$ 必为特征值. □

3.2. Hilbert 空间上自伴紧算子的谱分解. 首先我们介绍一族 Hilbert 空间 $(H_i)_{i\in I}$ 的直和.

令

$$\bigoplus_{i\in I} H_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H_i : \sum_{i\in I} ||x_i||^2 < \infty \right\}$$

赋予 $\bigoplus_{i\in I} H_i$ 如下的范数:

$$||(x_i)_{i\in I}|| := \left(\sum_{i\in I} ||x_i||^2 \right)^{1/2}$$

这实际上是一个 Hilbert 空间下的范数，其内积为

$$< (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} >:= \sum_{i\in I} < x_i, y_i >$$

则 $\bigoplus_{i\in I} H_i$ 成为一个新的 Hilbert 空间，称为 $(H_i)_{i\in I}$ 的**直和**.

练习 3.2. (1) 验证上述定义的 $|| - ||$ 是一个范数，且由上述内积诱导.
(2) 证明 $\bigoplus_{i\in I} H_i$ 在相应内积下是一个 Hilbert 空间.

定理 3.2 (谱分解定理). 设 T 为 H 上自伴紧算子，V_λ 表示特征值 λ 对应的特征子空间，则

(1)

$$H = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{spec}_p T} V_\lambda$$

因而 H 由一个由 T 的特征向量构成的完备正交系.

(2) 空间 $\overline{T(H)}$ 有一个由特征向量 $(e_n)_{n\geq 1}$ 构成的完备正交系，这里的 $(e_n)_{n\geq 1}$ 是分别对应于特征值 $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ 的特征向量 (序列 (λ_n) 可能是有限的)，使得

$$Tx = \sum_{n\geq 1} \lambda_n < x, e_n >, \quad \forall x \in H$$

这里的无穷求和表示依范数收敛，并且若 $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ 是无限的，则 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

证明. T 是紧算子, 由命题2.4, $\mathrm{spec}(T)$ 至多可数, 故可记所有非零特征值为序列 (λ_n). 特别地，当 $\{\lambda_n\}$ 是无限集时，有 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. 对应于非零特征值的特征子空间 V_{λ_n} 是有限维的，此时可记

$$\mathrm{spec}(T) - \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$$

且 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq 0$，这个序列中的特征值允许重复，特征值出现的次数等于特征子空间的维数 (我们称这个计数方法为**计重**).

若 $T = 0$，结论显然成立，此时 $H = V_0$. 不妨设 $T \neq 0$，则 $||T|| > 0$. 由定理3.1，存在 $\lambda^{(1)} \in \mathrm{spec}(T)$ 使得

$$|\lambda^{(1)}| = ||T|| = \max\{|m|, |M|\}$$

并由序列 (λ_n) 的性质可知, $\lambda^{(1)}$ 正好去序列 (λ_n) 的前某有限多个. 我们记

$$K_1 = \bigoplus_{|\lambda|=||T||} V_\lambda$$

则 K_1 为 H 的有限维子空间，并且有 $T(K_1) \subset K_1$，即 K_1 是关于 T 的不变子空间. 由此可得 $K_1^\perp$ 也是 T-不变的，事实上若我们任取 $y \in K_1^\perp$ 以及 $x \in K_1$，有

$$< Ty, x >=< T^* y, x >=< y, Tx >= 0$$

我们记满足 $|\lambda| = ||T||$ 的 $\lambda^{(1)}$ 为 λ_j, $1 \leq j \leq k$，则在 K_1 中存在一族相应的完备正交系 $(e_j)_{1\leq j\leq k}$，使得 $Te_j = \lambda e_j$.

现在，如果 $K_1^\perp = \{0\}$，则意味着 H 是有限维空间，那么结论成立. 设 $K_1^\perp \neq \{0\}$，记 $T_1 = T|_{K_1^\perp}$，则 T_1 是 $K_1^\perp$ 上的自伴紧算子. 设

$T_1 \neq 0$，则 $||T_1|| > 0$. 那么又存在非零的特征值 $\lambda^{(2)}$，满足

$$|\lambda^{(2)}| = ||T_1|| \leq ||T||$$

再记

$$K_2 = K_1 \oplus \left(\bigoplus_{|\lambda|=||T_1||} V_\lambda \right)$$

接下来对 K_2 做类似于上面的讨论，则可给出算子 $T_2 = T|_{K_2^\perp} : K_2^\perp \to K_2^\perp$. 重复这个过程，如果在有限次后，有 $T_n = 0$，则得证. 否则，这个过程可以无限进行下去，我们记

$$K = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}_p(T) \setminus \{0\}} V_\lambda$$

则 K 也是一个 Hilbert 空间，并且是可分的. 按照我们的构造方法，任取 $y \in K^\perp$，对任意 $n \geq 1$，也有 $y \in K_n$. 于是

$$| < Ty, y > | = | < T_n y, y > | \leq ||T_n|| \cdot ||y||^2 = ||\lambda^n|| \cdot ||y||^2 \to 0, \quad n \to \infty$$

从而可得，对任意 $y \in K^\perp$，有 $||Ty|| = 0$，即 $T(K^\perp) = \{0\}$. 并且这还意味着:

(1) $K^\perp = V_0$. 于是得到

$$H = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{spec}_p(T)} V_\lambda$$

(2) 空间 $\overline{T(H)} = K$. 于是有一个由特征向量序列 $(e_n)_{n\geq}$ 构成的完备正交系，这里每个特征向量 e_n 分别对应特征值 λ_n，使得

$$Tx = \sum_{n\geq 1} \lambda_n < x, e_n > e_n, \quad \forall x \in H$$

并且若 (λ_n) 是无限的，则 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

□

习题九

问题 50. 设 $E = C([0,1])$ 上赋予一致范数 $\|\cdot\|_\infty$，且 Φ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数. 定义算子 $T: E \to E$ 为

$$T(f)(s) = \int_0^1 \Phi(s,t)f(t)dt, \quad s \in [0,1].$$

证明：T 是紧的.

问题 51. 设 $E = L_2(0,1)$ 且 $\Phi \in L_2([0,1]\times[0,1])$. 定义算子 $T: E \to E$ 为

$$T(f)(s) = \int_0^1 \Phi(s,t)f(t)dt, \quad s \in [0,1].$$

证明：T 是紧的.

问题 52. 14. $C([0,1])$ T:

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

T $\sigma(T)$

设 $1 \le p \le \infty$，在 $L_p([0,1])$ 上定义和上面一样的算子 T，回答同样的问题.

问题 53 (Fredholm 选择定理). 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧算子，$\lambda \in \mathbb{K}$ 且 $\lambda \neq 0$. 证明：方程

$$\lambda x - T(x) = y$$

或者对每一个 $y \in E$ 有唯一解，或者对某些 y 有无穷多个解但对其他的 y 无解.

Part 4

偏微分方程与几何分析

CHAPTER 10

广义函数与 Sobolev 空间

旨趣. 早期泛函分析中大量空间与算子的例子来源于偏微分方程，因此在涉猎前九章泛函分析基本理论以后，以统筹的视角重新审视微分方程我们能够得到更高的观点. 事实上，在第1章的小小节2.1.2中已经指出，现代偏微分方程基于泛函分析最基本的观点就是找到合适的空间与算子，研究如下映射的问题

$$A : X \to Y$$

这意味着我们需要构造一个良好的能够容纳足够多微分方程解以及剔除过于差的解的函数空间，此外，求导、卷积、Fourier 变换等等运算应该被推广到更广义的函数空间中. 这个期望成为本章前两节的基本主线：首先我们建立了广义函数空间与紧支集分布的概念，它们本质上为 C_c^∞ 空间与 C^∞ 空间的对偶，其中拓扑用到了第7、8章中的弱 * 拓扑与逐点收敛拓扑的方法；此外，鉴于现代调和分析的需求，我们将 $\mathcal{L}^2$ 空间上的 Fourier 变换算子 $\mathcal{F}$ 推广到一般的广义函数空间，这里需要 Schwartz 空间的概念，我们最终的结果是将 $\mathcal{F}$ 定义在缓增分布空间上. 最后一节我们简要介绍 Sobolev 空间的概念，大致的思路

参考了 [**35, 2**]. 事实上 Sobolev 空间就是 C_c^∞ 空间在相应范数下的完备化，在这个空间上可以更好地讨论偏微分方程解的存在性问题 (不用担心一列解的极限函数不在空间中)，基于此，第5章中的 Ascoli 想法得以实施. 此外，我们还研究了不同指数间 Sobolev 空间的嵌入关系，在具体处理问题时归结为函数梯度对函数本身的控制，即

$$||u|| \lesssim ||\nabla u||$$

事实上，现代椭圆方程中有对解梯度的估计，称为能量不等式，大概归结为上述不等式的反向，参见 [**35, 4**]，因此我们可以串联这两个不等式引发迭代，最终得到对椭圆方程解的振幅 osc 的估计，这个技术后来被称为 De Giorgi 迭代，感兴趣的读者可以参见 Caffarelli 的文章 Caffarelli, Luis, and Alexis Vasseur. "The De Giorgi method for regularity of solutions of elliptic equations and its applications to fluid dynamics." Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 3.3 (2010): 409-427..

选取该主题与本人的兴趣有关，最后应用丘成桐先生在微分几何讲义中的一段话：

"由于微分方程理论的逐渐成熟，几何学家开始应用分析方法来解决几何问题，反过来, 微分几何理论又提供了大量有意义的微分方程，而研究这些方程, 往往要提出新的观点和方法, 所以分析学家也密切注意着几何学的发展，在这方面的领导人有 Hadamard，Morse，Lewy，Morrey，Bochner，Nash，Moser，Nirenberg，Efmov. 他们的工作，奠定了近 20 年来非线性偏微分方程在几何中的应用的基础."

致谢. 本章内容整体参考自浙江大学 2024-2025 秋冬学期偏微分方程荣誉课程的听课笔记，感谢浙江大学王伟 (小) 老师与张挺老师的讲授.

1. 广义函数与紧支集分布

1.1. 广义函数与分布. 广义函数最早由法国数学家 Schwartz 引入，用于讨论偏微分方程中出现的弱解等问题，参见 [**35, 6, 2, 21**].

1.1.1. *广义函数的引入.* 我们先看一个例子

$$\partial_x u = f \tag{22}$$

其中 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. 不难看出

$$u = \int_0^x f(s)\mathrm{d}s$$

回忆通常对微分方程解的定义，要求 u 具有一定的光滑性，见 [**22**]. 而上述解的表达确实存在，尽管 u 不一定具有较好的光滑性，这样的"解"也应该纳入考量. 因此我们需要给出一个合适的关于解的定义，使得 $f \in \mathcal{L}^1$ 恰好使得上述公式成立. 为此预定两条原则：

A1 包含合理的但不一定连续的解.

A2 不产生过多的"额外"的解.

下面考察一种可能的方案，对任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，在"形式内积"[1]下作用于方程，即

$$- < u, \partial_x \varphi > =< \partial_x u, \varphi >=< f, \varphi >:= \int f\varphi$$

注 1.1. $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得上述第一和三个等号有意义.

注意到 u 只要是可积函数即可. 一个显然的结论是：

若 u 满足方程 (22)，则对任意 $\varphi \in C_c^\infty$，都有

$$-\int u \cdot \partial_x \varphi = \int f \cdot \varphi \tag{23}$$

反过来，通过等式 (23) 可以定义解.

事实上，我们将方程 (22) 转化成一个泛函方程（见第1章小小节2.1.2的应用二），即

$$U[\varphi] = F[\varphi]$$

其中 $U : C_c^\infty \to \mathbb{R}$，$U[\varphi] := - < u, \partial_x \varphi >= -\int u \cdot \partial_x \varphi$. $F : C_c^\infty \to \mathbb{R}$，$F[\varphi] :=< f, \varphi >= \int f \cdot \varphi$. 不难看出，$U, F$ 都是 C_c^∞ 上的线性泛函.

[1]后面我们将知道这里的形式内积就是第7章中定义的概念，事实上

$$< -, - >: \mathcal{D}^* \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

其中 $\mathcal{D}$ 表示带拓扑的 C_c^∞，$*$ 表示对偶.

1.1.2. 测试函数空间. 为了更好地研究诸如此类的泛函方程，我们先为 $C_c^\infty(\Omega)$(其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中开区域, 往后不再说明) 赋予合适的拓扑. 回忆第4章中曾利用一族半范数诱导 C^∞ 与 C_c^∞ 上的拓扑，见例3.1.

对于 $C^\infty(\Omega)$，其中的半范数族被定义为

$$p_{K,\alpha}(f) := \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)|$$

其中 K 为 Ω 中任一紧子集，α 为多重指标. 在这族半范数下的拓扑是 Hausdorff 的可度量化拓扑 (本章中记为 τ_{C^∞}，并且记 $\mathcal{E}(\Omega) = (C^\infty(\Omega), \tau_{C^\infty})$)，并且相应的度量是完备的. 文献中将这类空间称为 **Fréchet 空间**，即由可数 (见例3.1中穷竭紧子集的办法) 半范数诱导的 Hausdorff 局部凸空间. 此外，针对 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中的收敛，依据拓扑可以描述为: 若 $(\psi_n)_{n\geq 1}$ 为 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中序列，称 (ψ_n) 在 $\mathcal{E}(\Omega)$ 中**收敛**于 0，记为 $\psi_n \to 0$, $(\mathcal{E}(\Omega))$，如果

$$\sup_K |\partial^\alpha \psi_n| \to 0, \quad \forall \alpha,\ K \subset \Omega$$

其中 K 为 Ω 中任一紧子集.

而对于紧支集的函数空间 $C_c^\infty(\Omega)$，我们规定其中序列的收敛为: 若 $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ 为 $C_c^\infty(\Omega)$ 中序列，称 (φ_n) 在 C_c^∞ 中**收敛**于 0，如果

(1) $\mathrm{supp}\varphi_n \subset\subset K$，其中 K 为 Ω 一紧子集;
(2) 对任意多重指标 α，$\sup_K |\partial^\alpha \varphi_n| \to 0$.

我们记这个收敛对应的拓扑为 $\tau_{C_c^\infty}$，并且简记 $\mathcal{D}(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega), \tau_{C_c^\infty})$，在广义函数论中往往称这个拓扑空间为**测试函数空间**，同时记这个收敛为 $\varphi_n \to 0$, $(\mathcal{D}(\Omega))$

注 1.2. (1) 显然 $\mathcal{E}, \mathcal{D}$ 都是 Hausdorff 局部凸空间.
(2) 不难看出在拓扑 τ_{C^∞} 下 $C_c^\infty(\Omega)$ 为 $C^\infty(\Omega)$ 的稠密子空间.
(3) 拓扑 τ_{C^∞} 与 $\tau_{C_c^\infty}$ 有区别，尽管 $\mathcal{E}$ 可度量化，$\mathcal{D}$ 不一定可度量化，参见 [**35, 32**].

练习 1.1. 证明上述注记中的 (1)(2).

1.1.3. 广义函数空间. 下面我们正式引入上文中提到的泛函.

定义 1.1. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中一开区域，称 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的有界线性泛函 $u:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{R}$ 为**广义函数**或**分布**，即对 Ω 的任一紧子集 K，存在常数 $C>0, N\geq 0$，使得

$$|<u,\varphi>|\leq C\sum_{|\alpha|\leq N}\sup_K|\partial^\alpha\varphi|,\quad \varphi\in C_c^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}\varphi\in\Omega$$

其中 φ 称为**试验函数**.

回忆第4章拓扑向量空间中对偶空间的概念，我们记全体 $\mathcal{D}$ 上广义函数的集合为 $\mathcal{D}^*$，即测试函数空间 $\mathcal{D}$ 的对偶空间，称为**广义函数空间**，不难看出 $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}^*$.

练习 1.2. 验证 $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}^*$.

注 1.3. (1) 实际上，上述说法有细微的瑕疵，回忆拓扑向量空间中对偶空间的定义 (见定义1.3)，其中元素为连续线性算子, 因此我们默认了线性算子的有界性与连续性等价. 这个断言是成立的, 由命题1.4保证, 我们在定理1.1中给出基于 Heine 归结原理 (见第1章) 的证明.

(2) 记号 $<-,->$ 就是第7章中定义的形式内积，即

$$<>:\mathcal{D}^*\times\mathcal{D}\to\mathbb{R}$$

定理 1.1. $u\in\mathcal{D}^*$ 当且仅当任意 $\varphi_n\to 0$ $(\mathcal{D}(\Omega))$ 蕴含 $<u,\varphi_n>\to 0$.

证明. 由定义，必要性显然成立. 下证充分性. 假设 $u\neq\mathcal{D}^*$，存在 K，对任意 $N\geq 0$，有 $\varphi_N\in\mathcal{D}$，使得

$$|<u,\varphi_N>|\geq N\sum_{|\alpha|\leq N}\sup_K|\partial^\alpha\varphi_N|$$

令 $\psi_N=\varphi_N\cdot(N\sum_{|\alpha|\leq N}|\sup_K|\partial^\alpha\varphi_N|)^{-1}$，于是 $|<u,\psi_N>|\geq 1$. 而 $\psi_N\to 0$ $\mathcal{D}$，与条件矛盾! □

例 1.1. (1) 设 $f\in\mathcal{L}^1(\Omega)$，定义 $<f,\varphi>:=\int\Omega f\cdot\varphi$，容易验证 f 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的广义函数.

(2) 设 $f\in\mathcal{L}^1(\Omega)$，定义 $<\partial^\alpha f,\varphi>:=(-1)^\alpha\int_\Omega f\cdot\partial^\alpha\varphi$，容易验证 $\partial^\alpha f$ 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的广义函数.

(3) 规定 $\delta : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $<\delta, \varphi>:= \varphi(0)$, 容易验证 δ 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的广义函数，称为 **Dirac 分布**. 进一步可以定义 $<\delta_{x_0}, \varphi>= \varphi(x_0)$.

例 1.2 (函数正则化). 取径向对称的非负紧支集光滑函数 η，并且

$$\int \eta = 1$$

注意这样的函数一定存在，事实上可取

$$\eta(x) := \begin{cases} Ce^{1-|x|^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

其中常数 C 用于调整 η 的积分值. 对任一 $f \in \mathcal{L}^p$，我们规定

$$f_\epsilon := \eta_\epsilon * f$$

其中 $\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$，$*$ 表示**卷积**，即

$$\eta_\epsilon * f(x) := \int \eta(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

不难验证 $f \in C^\infty$，并且有 $f_\epsilon \to f$, $\epsilon \to 0$. 我们称 η_ϵ 为**磨光算子**，上述过程说明 C^∞ 在 $\mathcal{L}^p$ 空间中稠密.

定义 1.2. 称分布列 (u_n) 在 $\mathcal{D}^*$ 中**收敛**于 u, 并称 u 为分布列 (u_n) 的**极限**，记为 $u_n \to u$ $(\mathcal{D}^*)$，如果

$$<u_n, \varphi>\to<u, \varphi>, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

注 1.4. 关于上述广义函数列收敛的定义, 我们放在泛函分析的框架下给几点叙述:

(1) 事实上, 广义函数空间 $\mathcal{D}^*$ 作为测试函数空间 $\mathcal{D}$ 的对偶空间, 我们定义拓扑为弱 * 拓扑，即 $\sigma(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$，见第7章第3节. 但这个定义并不具有良好的操作性，回忆第8章第3节，我们刻画了 w^*-拓扑与乘积空间 $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ 拓扑的等价性，而乘积拓扑又等价于逐点收敛拓扑，因此我们采用**逐点收敛**的方式来规定分布列的收敛，即

$$<u_n, \varphi>\to<u, \varphi>, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

(2) 回忆第8章第3节，上述收敛也称为分布列的**弱收敛**.

(3) 不光对于广义函数空间 $\mathcal{D}^*$，下一节中介绍的缓增分布空间 (见定义2.3，即 Schwartz 空间 (见例3.3) 的对偶空间) 也同样采用弱 * 拓扑，我们不再赘述.

我们用上述定义考察磨光算子的极限.

例 1.3. 对任意 $\varphi \in \mathbb{C}_c^\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} < \eta_\epsilon, \varphi > &= \lim_{\epsilon\to 0} \int \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)\varphi(y)\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \int \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\cdot z\right)\varphi(\epsilon\cdot z)\mathrm{d}z \\ &= \varphi(0) =< \delta, \varphi >\end{aligned}$$

因此磨光算子 η_ϵ 的极限是 Dirac 分布 δ.

1.1.4. *广义函数的若干性质*. 广义函数空间有近乎经典函数空间若干“好”的性质.

定理 1.2 (Lebesgue 控制收敛定理). 设 $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$，且 $f_n \to f$ a.e.. 若存在 $g \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$，使得 $|f| \leq g$，则 $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$，且

$$f_n \to f\ (\mathcal{D}^*)$$

证明. 任取 $\varphi \in C_c^\infty$，利用经典 Lebesgue 控制收敛定理，我们有

$$< f_n, \varphi >= \int f_n \cdot \varphi \to \int f \cdot \varphi =< f, \varphi >$$

□

注 1.5. 其次，空间 $\mathcal{D}^*$ 是序列完备的，即若 $u_n \to u\ (\mathcal{D}^*)$，则 $u \in \mathcal{D}^*$.

定义 1.3. 设 $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$，定义 $\partial_i u$ 为 u 的**偏导数**，其中

$$< \partial_i u, \varphi >:= - < u, \partial_i \varphi >, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

同理可以定义高阶偏导数，即

$$< \partial^\alpha u, \varphi >:= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi >, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 表示多重指标，$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.

注 1.6. 若 u 是具有相应光滑性的函数，可以验证，上述广义偏导数就是经典偏导数.

练习 1.3. 证明上述注记.

命题 1.1. (1) 若 $u_n \to u$，则 $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$；
(2) 若 $f, g \in C(\Omega)$，对任意 $\varphi \in C_c^\infty$，有 $- < f, \partial_i \varphi > = < g, \varphi >$，则

$$g = \partial_i f$$

证明. (1) 注意到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} < \partial^\alpha u_n, \varphi > &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} < u_n, \partial^\alpha \varphi > \\
&= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi > \\
&= < \partial^\alpha u, \varphi >
\end{aligned}$$

即可. (2) 留作习题. □

练习 1.4. 验证上述命题的 (2).

例 1.4. 定义 **Heaviside 函数**为

$$H(x) : \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{24}$$

对任意 $\varphi \in C_c^\infty$，有

$$\begin{aligned}
< H', \varphi > &= - < H, \varphi' > \\
&= - \int H \cdot \varphi' \\
&= - \int_0^\infty \varphi' \\
&= \varphi(0) = < \delta, \varphi >
\end{aligned}$$

因此 $H' = \delta$.

1.2. 紧支集分布.

1.2.1. 紧支集分布的定义. 回忆上一节中的广义函数，即分布，我们已经知道在 C_c^∞ 空间上加拓扑 $\tau_{C_c^\infty}$，记为 $\mathcal{D}$，其相应的对偶空间称为广义函数空间 $\mathcal{D}^*$，并且有一个显然的包含关系：

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^*$$

其中 $\mathcal{D}$ 为稠密子空间. 并且考虑 C^∞ 上的拓扑 τ_{C^∞}，记为 $\mathcal{E}$. 紧支集分布刻画为 $\mathcal{E}$ 上的有界线性泛函.

定义 1.4. 称有界线性泛函 $u : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$ 为 $\mathcal{E}(\Omega)$ 上的**紧支集分布**，即存在紧子集 $K(\subset \Omega)$，以及 $C, N \geq 0$，使得

$$| < u, \varphi > | \leq C \sup_K \sum_{|\alpha| \leq N} |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C^\infty$$

称全体紧支集分布的集合为 $\mathcal{E}^*(\Omega)$.

注 1.7. (1) 紧支集分布有类似定理1.1的结果, 即有界紧支集分布等价于连续紧支集分布.

(2) 根据对偶空间理论，我们有如下包含关系

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*, \quad \mathcal{E}^* \subset \mathcal{D}^*$$

其中 $\mathcal{E}$ 为稠密子空间，参见 [**7, 21**].

事实上，名词“紧支集分布”不是偶然的，我们先定义分布的支集.

定义 1.5. 设 $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$，记 $\mathrm{supp} u$ 为 u 的**支集**，如果

$$\mathrm{supp} u := \overline{\{x \in \Omega : u \neq 0\}}$$

其中 $u = 0$ 当且仅当对任意 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，都有 $< u, \varphi >= 0$.

不难验证，紧支集分布有紧的支集. 并且可以定义广义函数的局部化，即，若 $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$，对任意 $\varphi \in C_c^\infty(U)$，其中 $U \subset \Omega$，有

$$u \mapsto < u, \varphi >$$

后者是在 $\mathcal{D}^*(U)$ 中的.

练习 1.5. 证明上述论断.

1.2.2. 广义函数的运算. 下面我们介绍广义函数的若干运算.

(1) 对 $f \in C^\infty$，以及 $u \in \mathcal{D}^*$，规定

$$< f \cdot u, \varphi >:=< u, f \cdot \varphi >, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

为 f 与 u 的**乘积**，并且不难验证 Leibniz 法则

$$\partial^\alpha (f \cdot u) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta f \cdot \partial^\gamma f$$

练习 1.6. 证明上述 Leibniz 法则.

(2) 设 $u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$，以及 $h \in \mathbb{R}^n$，规定 u 向 h 方向的平移 $\mathcal{T}_h$ 为

$$< \mathcal{T}_h u, \varphi >:=< u, \varphi(x+h) >, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

其中形式上有 $\mathcal{T}_h u(x) := u(x-h)$，上述定义在如下积分换元中可见一斑

$$\int u(x-h) \cdot \varphi(x) = \int u(x) \cdot \varphi(x+h)$$

此时

$$\mathcal{T}_h : \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$$

定理 1.3. (a) 若 $u \in C(\mathbb{R}^n)$，则 $u(x-h) = \mathcal{T}_h u(x)$；

(b) $\mathcal{T}_h$ 关于 u 连续，即对任意 $u_n \to u$ $(\mathcal{D}^*)$，蕴含

$$\mathcal{T}_h u_n \to \mathcal{T}_h u \ (\mathcal{D}^*)$$

(c) $\partial \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h \partial$；

(d) 固定 $u \in \mathcal{D}^*$, $\mathcal{T}_h$ 关于 h 是光滑的, 且 $(\partial_{h_i} \mathcal{T}_h) u = -\partial_i (\mathcal{T}_h u)$

证明. 我们给出 (c)(d) 的证明，其中 (a)(b) 由读者补充.

对于 (c)，任取 $u \in \mathcal{D}^*$，$\varphi \in C_c^\infty$，于是

$$\begin{aligned} < (\partial \mathcal{T}_h) u, \varphi > &= - < \mathcal{T}_h u, \partial \varphi > \\ &= - < u, \partial \varphi(- + h) > \\ &=< \partial u, \varphi(- + h) > \\ &=< \mathcal{T}_h \partial u, \varphi > \end{aligned}$$

对于 (d)，光滑性是显然的. 此外，任取 $u \in \mathcal{D}^*$，$\varphi \in C_c^\infty$，于是

$$\begin{aligned}
<(\partial_{h_i}\mathcal{T}_h)u,\varphi> &= \partial_{h_i} <u,\varphi(-+h)> \\
&= <u,\partial_{x_i}\varphi(-+h)> \\
&= -<\partial_{x_i}u,\varphi(-+h)> \\
&= -<\mathcal{T}_h\partial_{x_i}u,\varphi> \\
&= -<\partial_{x_i}(\mathcal{T}_h u),\varphi>
\end{aligned}$$

□

练习 1.7. 证明上述定理的 (a)(b).

(3) 设 $u \in \mathcal{D}^*$，$v \in \mathcal{E}^*$，定义**卷积**

$$<u*v,\varphi>:=<u,<\mathcal{T}_y v,\varphi>_x>_y$$

注意到，任取 $\varphi \in C_c^\infty$，传统的卷积为

$$\begin{aligned}
<u*v,\varphi> &= \int (u*v)(x)\varphi(x)\mathrm{d}y \\
&= \int\int u(x-y)v(y)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int g(y)\int \left(u(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= <v,<\mathcal{T}_y u,\varphi>_x>_y
\end{aligned}$$

因此广义函数的定义如上，并且要求 $u \in \mathcal{D}^*$，$v \in \mathcal{E}^*$.

练习 1.8. 证明：对任意 $u, v, w \in \mathcal{E}^*$，

(a) $u*v = v*u$；

(b) $\partial_i(u*v) = \partial_i u * v = u * \partial_i v$；

(c) $(u*v)*w = u*(v*w)$.

注 1.8. 此外，广义函数的卷积可以操作广义函数的正则化，类似例1.2.

2. Schwartz 空间与 Fourier 变换

2.1. Schwartz 空间. 我们在第7章第3节中介绍了 Schwartz 空间，本节中将介绍这类空间的对偶空间，为此，需要为 Schwartz 空间构造的动机做一个描述，参见 [**20, 19, 35**].

我们知道 Schwartz 空间也称速降函数空间，事实上，对任意 $\mathbb{R}^n$ 上的多项式函数，其增长率一般形如

$$(1+|x|^2)^{|\alpha|/2}$$

其中 α 为多重指标，即 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，并且 $x=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 此时要求函数 φ 连同导数的增长率不会被任意多项式控制 (例如指数函数 e^x)，即要求

$$\left|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{|\alpha|/2}\cdot\partial^\beta\varphi(x)\right|<\infty$$

其中 β 为任意多重指标. 注意上述定义等价于

$$\left|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}x^\alpha\cdot\partial^\beta\varphi(x)\right|<\infty$$

我们给出速降函数空间的定义，同例3.3.

定义 2.1 (Schwartz 空间). 设 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，称 φ 为**速降函数**，如果

$$\left|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}x^\alpha\cdot\partial^\beta\varphi(x)\right|<\infty$$

其中 α,β 为多重指标. 并且称全体速降函数构成的集合为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

练习 2.1. 验证如下包含关系，且在拓扑 τ_{C^∞} 下是稠密的：

$$C_c^\infty\subset\mathcal{S}\subset C^\infty$$

注 2.1. (1) $e^{-|x|^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，一般地，$P(x)e^{-|x|^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，其中 $P(x)$ 为多项式函数.

(2) $e^{-|x|}\notin\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，原因在于 $e^{-|x|}$ 不光滑，然而 $e^{-\sqrt{|x|^2+\epsilon}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\epsilon>0$.

回忆例3.3，我们在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中定义一族半范数

$$||\varphi||_{\alpha,\beta}:=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\cdot\partial^\beta\varphi(x)|$$

使得 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 成为 Hausdorff 局部凸空间，并且拓扑可完备度量化.

在这个拓扑下，我们称速降函数列 (φ_n) **收敛**于 0，记为 $\varphi_n \to 0,\ (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$，如果

$$||\varphi_n||_{\alpha,\beta} \to 0, \quad \forall \alpha, \beta$$

另一个事实我们留作练习：

练习 2.2. 证明：

(1) 任意多项式函数 $p(x), q(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$(见第3章定义4.2)，有

$$p(x)q(\partial)$$

其中 ∂ 为偏微分算子，将 x 的分量 x_i 替换为 ∂_i，为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续映射.

(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$，事实上存在连续嵌入 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

2.2. Fourier 变换. 我们在第3章中初步回忆了一维 Fourier 分析中的若干概念，在一般调和分析中会研究 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换甚至对广义函数做 Fourier 变换，首先回忆 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换.

定义 2.2 (Fourier 变换). 设 $f \in \mathcal{L}^1(X)$，特别地，取 $X = \mathbb{R}^n$ 表示 Lebesgue 测度空间 (见第1章例1.3)，定义 **Fourier 变换算子**

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_X f(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}\mu$$

Fourier 分析中两个基本的结果是

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(X) \to \mathcal{L}^2(X)$$

以及

$$f \hat{*} g = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

参见 [**19, 20, 2**]. 利用第一个事实结合 $C_c^\infty(X)$ 在 $\mathcal{L}^2$ 中的稠密性可以将 $\mathcal{F}$ 延拓成为 $\mathcal{L}^2(X)$ 中的算子，也称 Fourier 变换算子，即等距同构

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(X) \to \mathcal{L}^2(X)$$

以上 X 一般取局部紧的 Hausdorff 空间 (LCH 空间)，参见 [**19, 2**].

同时一些基本的性质是容易验证的：

练习 2.3. 验证 $\mathcal{L}^2$ 空间上的 Fourier 变换算子满足如下性质：

(1) $\mathcal{F}[\lambda f+\mu g]=\lambda\mathcal{F}[f]+\mu\mathcal{F}[g],\quad \forall f,g\in\mathcal{L}^2(X),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$

(2) $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}=I_{\mathcal{L}^2}.$

(3) $\mathcal{F}[\partial_i f]=(i\xi)\mathcal{F}[f],\ \mathcal{F}[x_j\cdot f]=i\partial_j\mathcal{F}[f].$

下面我们将 Fourier 变换算子限制在子空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 事实上,Schwartz 空间是 Fourier 变换算子的不变子空间，更进一步地，$\mathcal{F}$ 在其上的作用是等距同构.

定理 2.1. $\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 (连续) 同构.

证明. 先证 $\mathcal{F}(\mathcal{S})\subset\mathcal{S}$. 任取 $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\varphi\in\mathcal{S}$, α,β 为多重指标，考查

$$\begin{aligned}\xi^\alpha\cdot\partial_\xi^\beta(\hat{\varphi})&\sim\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\int\varphi(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x\\&\sim\int\xi^\alpha x^\beta\varphi(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x\\&\sim\int x^\beta\varphi(x)\partial_x^\alpha(e^{-i\xi x})\mathrm{d}x\\&\sim\int e^{-i\xi x}\partial_x^\alpha(x^\beta\varphi(x))\mathrm{d}x<\infty\end{aligned}$$

此外，注意到 $||\varphi_n||_{\alpha,\beta}\to 0$ 表示为

$$||\partial_x^\alpha(x^\beta\varphi_n)||\to 0,\quad\forall\alpha,\beta$$

这蕴含 $||\hat{\varphi}||_{\alpha,\beta}\to 0$. 因此 $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$ 是连续同构. □

最后，我们可以解释为什么定义 Schwartz 空间. 事实上，若对广义函数定义 Fourier 变换，可能的方法为

$$<\mathcal{F}[u],\varphi>:=<u,\mathcal{F}[\varphi]>$$

其中 u 为广义函数，自然的问题是：φ 应该属于什么空间?

- $\mathcal{E}$ 空间太大，有些光滑函数无法良性定义 Fourier 变换.
- $\mathcal{D}$ 空间太小，有些紧支集函数做完 Fourier 变换后不再具有紧支集.

而上述定理暗示我们, 可以将测试函数 φ 的范围限制在 Schwartz 空间上.

2.3. 缓增分布. 下面我们来定义 Schwartz 空间的对偶空间.

定义 2.3 (缓增分布). $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函 u 称为**缓增分布**, 即存在常数 $C>0$ 以及自然数 N 使得

$$|<u,\varphi>| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq N} ||\varphi||_{\alpha,\beta}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

记全体缓增分布构成的集合为 $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$.

由对偶，不难看出如下稠密的包含关系：

$$\mathcal{E}^* \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{D}^*$$

定义 2.4. 定义缓增分布空间 $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ 上的 **Fourier 变换算子**为

$$<\mathcal{F}[u],\varphi>:=<u,\mathcal{F}[\varphi]>, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

其中 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$.

该算子具有传统 Fourier 变换的性质, 首先, $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$ 即为经典 Fourier 变换，此外，可定义逆变换

$$<\mathcal{F}^{-1}[u],\varphi>:=<u,\mathcal{F}^{-1}[\varphi]>, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

其中 $u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$. 事实上

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = I_{\mathcal{S}}$$

以及

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$$

为连续同构.

练习 2.4. 验证上述论断.

练习 2.5. 设 $\mathcal{F}$ 为上述定义的 Fourier 变换算子，证明：

(1) $\mathcal{F}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{F}[f] + \mu \mathcal{F}[g], \quad \forall f, g \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = I_{\mathcal{L}^2}$.

(3) $\mathcal{F}[\partial_i f] = (i\xi)\mathcal{F}[f],\ \mathcal{F}[x_j \cdot f] = i\partial_j \mathcal{F}[f]$.

(4) $\mathcal{F}[\mathcal{T}_h u] = e^{i\xi h}\mathcal{F}[u],\ \mathcal{F}[e^{ixh}u] = \mathcal{T}_h \mathcal{F}[u]$.

注 2.2. (3) 中为简化记号，我们记 $D_j = -i\partial_j$，于是

$$\mathcal{F}[D^\alpha] = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[u], \quad \mathcal{F}[x^\alpha u] = (-D)^\alpha \mathcal{F}[u]$$

其中 α, β 为多重指标.

例 2.1 (Dirac 函数的 Fourier 变换). (1) 计算 Dirac 函数 δ 的 Fourier 变换，任取 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}[\delta], \varphi > &=< \delta, \mathcal{F}[\varphi] > \\ &=< \delta, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\xi x} \varphi(x) \mathrm{d}x > \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$.

(2) 计算 $\partial^\alpha \delta$ 的 Fourier 变换，同样考察

$$\begin{aligned} < \partial^\alpha \mathcal{F}[\delta], \varphi > &= (-1)^{|\alpha|} < \delta, \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi] > \\ &= (-1)^{|\alpha|} < \delta, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (-ix)^\alpha e^{-\xi x} \varphi(x) \mathrm{d}x > \\ &= (i)^{|\alpha|} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int x^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{F}[\partial^\alpha \delta] = \frac{(ix)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}}$.

例 2.2. 计算 x^α 的 Fourier 变换，由上一例的 (1) 可知 $\mathrm{F}[1] = (2\pi)^{n/2}\delta$，结合 (2) 可知

$$\mathcal{F}[x^\alpha] = (2\pi)^{n/2} \partial^\alpha \delta$$

同时可以验证 $\mathcal{F}$ 的代数性质也是继承的.

命题 2.1. 对任意 $u, v \in \mathcal{E}^*$，有

$$u \hat{*} v = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \cdot \hat{v}$$

证明. 任取 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，考察

$$\begin{aligned}< u \hat{*} v, \varphi > &=< u * v, \hat{\varphi} > \\ &=< \delta, u \hat{*} v \cdot \varphi > \\ &=< \delta, (2\pi)^{n/2} \hat{u} \cdot \hat{v} \cdot \varphi > \\ &= (2\pi)^{n/2} < \hat{u} \cdot \hat{v}, \varphi >\end{aligned}$$

□

2.4. 拟微分算子与基本解.

2.4.1. 拟微分算子. 利用广义的 Fourier 变换算子可以将正整数阶的微分算子推广到实数阶.

设

$$p(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \le M} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

为 C^∞-系数多项式 (即变量 ξ 的系数为 C^∞ 函数 $a_\alpha(x)$)，定义

$$P(x, D) := \sum_{|\alpha| \le M} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D = i\partial$$

为 M **阶微分算子**. 即对任意 $\varphi \in C^\infty$

$$P(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha| \le M} a_\alpha(x) D^\alpha \varphi$$

回忆练习2.2的 (1) 与练习2.5的 (3)，我们知道

$$\mathcal{F}[D^\alpha \varphi](\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi)$$

再利用 $\mathcal{F}$ 的可逆性，有

$$D^\alpha \varphi = \mathcal{F}^{-1}[\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi)]$$

因此对一般的函数 $p(x, \xi)$，可以视为 $P(x, D)$，作

$$P(x, D)\varphi = \mathcal{F}^{-1}[\xi^\alpha \hat{\varphi}]$$

定义 2.5. 设 $p(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}^n_\xi)$，称 p 为 S^m **类函数**，如果存在 $m \in \mathbb{N}^+$ 使得

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi) \right| \le C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}, \quad \exists C_{\alpha,\beta} > 0$$

记为 $p(x,\xi)\in S^m$，其中最小的 m 称为 p 的**阶**.

定义 2.6. 设 $p(x,\xi)\in S^m$，定义

$$P(x,D)\varphi := (2\pi)^{-n/2}\int e^{i\xi x}p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

为 $\mathcal{S}$ 上的连续线性映射 (可延拓为 $\mathcal{S}^*\to\mathcal{S}^*$). 称 $P(x,D)$ 为一个 m **阶拟微分算子**，其中 $p(x,\xi)$ 称为 $P(x,D)$ 的**象征**.

例 2.3. (1) 熟知 Laplace 算子

$$\Delta := \sum_{j=1}^n \partial_j^2$$

是 2 阶拟微分算子，其象征为 $-|\xi|^2 = -\sum_{j=1}^n \xi_j^2$，其中 $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 此外，$\partial_j$ 的象征为 $-i\xi_j$.

(2) $(\Delta)^{-\alpha}$ 的象征为 $|\xi|^{2\alpha}$.

(3) $(I-\Delta)^{1/2}$ 的象征为 $\sqrt{1+|\xi|^2}$.

2.4.2. *基本解*. 最后我们介绍微分方程中基本解的概念.

对常系数方程

$$P(\partial)u := \sum_{|\alpha|\le m}\partial^\alpha u = f \tag{25}$$

例如三大方程：

- Laplace 方程：$\Delta u = f$
- 热方程：$(\partial_t - \Delta)u = f$
- 波动方程：$(\partial_t^2 - \Delta)u = f$

练习 2.6. 写成三大方程中微分算子对应的象征.

对方程 (25) 两边作 Fourier 变换

$$p(\xi)\hat{u} = \hat{f}$$

进而要求 u，即计算

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}/p]$$

遗憾的是, 这个方法面临两个问题: 一是 p 可能有零点, 导致函数 $\hat{f}/p$ 不一定可操作；其次 Fourier 逆变换 $\mathcal{F}^{-1}$ 的计算一般都非常困难. 因此我们退而求其次，找到合适的 E，使得

$$P(\partial)E = \delta \tag{26}$$

这是因为

$$P(\partial)(E * f) = \delta * f = f$$

我们称满足等式 (26) 的 E 为常系数方程 (25)(实际上是拟微分算子 P) 的**基本解**，参见 [**35, 2, 6**].

3. Sobolev 空间

3.1. Sobolev 空间.

3.1.1. *Sobolev 空间的定义与性质*. 第1、2章我们知道赋范空间 $(C_c^\infty, ||-||_p)$, $(C^\infty, ||-||_p)$ 不完备，$\mathcal{L}^p$ 是它们的完备化空间.

定义 3.1. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中开区域，$k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. 称

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}^* : D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega),\ |\alpha| \leq k\}$$

为 **Sobolev 空间**，其中称分布 $u \in \mathcal{L}^p$，如果存在 $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ 使得

$$< u, \varphi >= \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

可以定义空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的范数

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_p, \quad 1 \leq p < \infty$$

特别地，当 $p = \infty$ 时，定义

$$||u||_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_\infty$$

特别地，当 $k = 0$，$W^{0,p} = \mathcal{L}^p$.

练习 3.1. 验证 $||-||_{W^{k,p}(\Omega)}$ 是一个范数.

定理 3.1. Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间.

定理 3.2. 证明完备性. 任取 Cauchy 列 $(u_n)_{n\geq 1}$，由定义

$$\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u_m - D^\alpha u_n||_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0, \quad m, n \to \infty$$

这说明对任意 $|\alpha| \leq k$，$(D^\alpha u_n)$ 为 $\mathcal{L}^p$ 中 Cauchy 列，由 $\mathcal{L}^p$ 的完备性可知存在 $u_0^\alpha \in \mathcal{L}^p$ 使得

$$||D^\alpha - u_0^\alpha||_p \to 0$$

特别地，当 $|\alpha| = 0$ 时，存在 $u_0 \in \mathcal{L}^p$ 使得 $||u_n - u_0||_p \to 0$. 下证

(1) $D^\alpha \in \mathcal{L}^p$, $\forall |\alpha| \leq k$;

(2) $||u_n - u_0||_{W^{k,p}} \to 0$.

这说明 $u_0 \in W^{k,p}$，进而定理得证.

对于 (1). 任取 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，考察

$$\begin{aligned}< D^\alpha u_0, \varphi > &= (-1)^{|\alpha|} < u_0, D^\alpha \varphi > \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} < u_n, D^\alpha \varphi > \\ &= \lim_{n\to\infty} < D^\alpha u_n, \varphi > \\ &=< u_0^\alpha, \varphi >\end{aligned}$$

故 $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p$.

对于 (2)，事实上，由 (1) 可知 $||D^\alpha u - D^\alpha u_0||_p \to 0$, $\forall |\alpha| \le k$，进而

$$||u_n - u||_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$

注意，$(C_c^\infty(\Omega), ||-||_{W^{k,p}(\Omega)})$ 不完备，而 $W^{k,p}(\Omega)$ 为其完备化空间. 对于 $(C^\infty(\Omega), ||-||_{W^{k,p}(\Omega)})$，我们定义

$$\mathcal{M}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) : ||u||_{W^{k,p}} < \infty\} \,(\subset C^\infty(\Omega))$$

那么 $(\mathcal{M}(\Omega), ||-||_{W^{k,p}})$ 不是完备的，与定义3.1相同的方式，我们规定 $H^{k,p}(\Omega)$ 为其完备化空间.

注 3.1. 若 $\partial\Omega \in C^\infty$，则 $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$.

练习 3.2. 验证 $W^{k,p}$ 的如下性质:

(1) $W^{k+1,p} \subset W^{k,p}$;
(2) 若 Ω 有界，则 $W^{k,q} \subset W^{k,p}$，其中 $q \ge p \ge 1$.
(3) $u \in W^{K,P}$，$|\alpha| \le k$，则 $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}$
(4) 设拟微分算子 $P(x,D) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$，其中 $a_\alpha \in C^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$，于是

$$P(x,D) : W^{k,p} \to W^{k-m,p}$$

3.1.2. *Sobolev* 空间的应用. 我们简单解释空间 $W^{k,p}$ 的完备性在偏微分方程中的应用. 考察有界区域 Ω 上的热方程

$$\begin{cases} \partial_t u - a(x)\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{27}$$

注意到

$\mathcal{L}^2(\Omega) = \mathrm{span}\{\varphi_\lambda(x) : \varphi_\lambda$ 为 Laplace 算子 Δ 在区域 Ω 上的特征函数$\}$

于是取 $\mathrm{spec}\Delta_\Omega$ 的前 k 个特征值做成 k 维向量空间 $\mathbb{E}_k$，其中 Δ_Ω 表示算子 Δ 限制在区域 Ω 上. 对任意 $\Phi \in \mathbb{E}_k$，我们得到以下常微分方程

$$< \partial_t u - a(x)\Delta u, \Phi(x) >= 0$$

遍历每个 k，由常微分方程理论可得一列解 $(u_k)_{k\geq 1}$. 我们希望这列解 (u_k) 有极限，由 $W^{k,p}$ 的完备性可知只要验证某个 Cauchy 列的性质或某个 Ascoli 定理的条件 (见第5章) 就可以找到极限函数 u_0. 这个极限函数 u_0 就是上述热方程潜在的解.

3.1.3. 实指数 *Sobolev* 空间. 下面我们将 $W^{k,p}$ 中的指数 p 推广到一般的 $p(\in \mathbb{R})$.

定义 3.2. 设 $s \in \mathbb{R}$，记

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$$

为**实指数** s **的 Sobolev 空间**.

可以定义 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 上的内积

$$< u, v >:= \int (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

以此诱导范数

$$||u||_s := \sqrt{< u, u >}$$

练习 3.3. 验证上述论断.

我们来解释为什么如此定义. 事实上, $u \in \mathcal{L}^2$ 蕴含 $\hat{u} \in \mathcal{L}^2$. 若 $u \in \mathcal{S}^*$ 以及 $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2$, 于是

$$D^{\hat{\alpha}} u = \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \in \mathcal{L}^2$$

因此对任意 $|\alpha| \leq k$, 其中 k 为自然数, $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2$, 我们有

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi|^{|\alpha|} \hat{u}(\xi) \in \mathcal{L}^2$$

这等价于

$$(1 + |\xi|^2)^{k/2} \hat{u}(\xi) \in \mathcal{L}^2$$

注意此时的 k 可以是一般的实数.

显然

$$\cdots \subset H^s \subset H^0 = \mathcal{L}^2 \subset H^{-s} \subset \cdots$$

同样的方法, 不难验证:

定理 3.3. $H^s(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Hilbert 空间, 且 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为其稠密子空间.

练习 3.4. 证明上述定理.

练习 3.5. 证明:

(1) H^s 的对偶空间为 H^{-s}.

(2) 若 $s \in \mathbb{N}^+$, 则 $H^2 = W^{s,2}$.

3.2. Sobolev 嵌入定理. 一个自然的问题是: 什么情况下有包含关系 $W^{k_1,p_1}(\Omega) \subset W^{k_2,p_2}(\Omega)$? 这里我们只关心

$$1 \leq p < n$$

的情形. 希望,

$$||u||_q \leq C||v||_p, \quad 1 \leq p \leq n \tag{28}$$

这等价于

$$||u||_q \lessapprox ||\nabla v||_p$$

等价于

$$||u||_{W^{0,q}} \lessapprox ||u||_{W^{1,p}}$$

3.2.1. 伸缩不变性. 首先，确定 p 与 w 的算术关系. 我们利用不等式 (28) 的**伸缩不变性**.

为此，令 $u_\lambda(u) = u(\lambda x)$，$x \in \mathbb{R}^n$. 考察

$$||u_\lambda||_q \leq C||\nabla u_\lambda||_p$$

于是不等式左边为

$$\frac{1}{\lambda^n}\int |u(y)|^q \mathrm{d}y$$

右边为

$$C\frac{\lambda^p}{\lambda^n}\int |\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y$$

于是

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}}||u||_q \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{n/p}}||\nabla u||_p$$

即

$$||u||_q \leq C\lambda^{1-n/p+n/q}||\nabla u||_p$$

因此要求

$$q = \frac{np}{n-p}$$

这等价于 $1/q = 1/p - 1/n$，此时称 p, q 为 **Sobolev 共轭指标**.

3.2.2. *GNS* 不等式.

定理 3.4 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). 设 $1 \leq p < n$，存在依赖于 p, n 的常数 C 使得

$$||u||_q \leq C||\nabla u||_p, \quad \forall u \in C_c^1$$

其中 q 为 p 的 Sobolev 共轭指标.

证明，(Evans，[**2**]). 分以下两步证明:

Step 1 首先假设 $p = 1$. 由于 u 具有紧支集，对于每个 $i = 1, \cdots, n$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\mathrm{d}y_i$$

因此

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \cdots, y_1, \cdots, x_n)|\mathrm{d}y_1, \quad i = 1, \cdots, n$$

于是

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \cdots, y_1, \cdots, x_n)| \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

将不等式对 x_1 积分：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

最后一个不等式由广义 Hölder 不等式得出，参见 [**2**].

现在将上述不等式对 x_2 积分：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&\qquad \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1,\ i\neq 2}^{n} I_i^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_2
\end{aligned}$$

其中

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_1, \quad I_i := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \quad i = 3, \cdots, n$$

再次应用广义 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&\qquad \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}x_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\qquad \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}y_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

我们继续对 $x_3, \cdots, x_n$ 积分，最终得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}y_i \cdots \mathrm{d}x_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \mathrm{d}x \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Step 2 现在考虑 $1 < p < n$ 的情况. 我们将上一个不等式的估计应用于 $v = |u|^\gamma$，其中 $\gamma > 1$ 待选. 则

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{p-n}{n-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} \le \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma|\mathrm{d}x = \gamma\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|\nabla u|\mathrm{d}x$$
$$\le \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

我们选择 γ 使得 $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$. 即设

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$$

此时 $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = q$. 最终我们有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

上述定理中的不等式称为 **GNS 不等式**，它刻画了函数梯度 ∇u 如何控制函数本身. 反复使用 GNS 不等式，我们得到

定理 3.5 (Sobolev 嵌入定理). 设 $k/n < 1/p \le 1$，并且 $1/q = 1/p - k/n$，其中 $k \le n$，我们有

$$||u||_{W^{m-k,q}} \lessapprox ||u||_{W^{m,p}}, \quad \forall u \in W^{m,p},\ m \ge k$$

练习 3.6. 证明上述定理.

注 3.2. 这个定理告诉我们：当两个 Sobolev 空间的指数 p, q 满足如下算术关系

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \quad k \le n$$

时，有连续嵌入

$$W^{m,p} \hookrightarrow W^{m-k,q}$$

事实上，更一般的观察是这里的指数 p, q 只要满足 $q > p$ 就可以引发连续嵌入，为此需要更一般的估计，参见 [**2**].

3.3. Hölder 空间.

定义 3.3. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中开区域，记

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \left\{ u \in C(\Omega) : ||u||_{C^{0,\alpha}} := \sup_{x,y\in\Omega} \frac{u(x)-u(y)}{x-y} < \infty \right\}, \quad 0<\alpha<1$$

为 **Hölder 空间**.

注 3.3. 当 $\alpha = 1$ 时，表示 Lipschitz 的 (见第1章定义2.1) 函数，进一步可以定义

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \left\{ u \in C^k(\Omega) : ||\partial^k u||_{C^{0,\alpha}} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{\partial^k u(x) - \partial^k u(y)}{x-y} < \infty \right\}, \quad 0<\alpha<1$$

对于 Hölder 空间，我们同样有如下的嵌入定理，参见 [**2**].

定理 3.6 (Hölder 嵌入定理). 若 $\frac{k-1}{n} < p < \frac{k}{n}$，$k \leq n$，记 $\alpha = k - \frac{n}{p} \in (0,1)$，则有

$$||u||_{C^{m-k,\alpha}} \leq C||u||_{W^{m,p}}, \forall u \in C^{m-k,\alpha}$$

其中 $C^{k,\alpha}$ 中的范数 $||-||_{C^{k,\alpha}}$ 定义为

$$||u||_{C^{k,\alpha}} := \sum_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha u||_\infty + \sum_{|\alpha|=k} ||\partial^\alpha u||_{C^{k,\alpha}}$$

这个定理暗示如下连续嵌入：

$$W^{m,p} \hookrightarrow C^{m-k,\alpha}$$

3.4. 紧嵌入. 回忆第9章中定义的紧算子, 我们也称紧算子 T 是**紧嵌入**如果 T 还是单射.

事实上, 在 Sobolev 空间理论中有一种紧嵌入, 我们给出叙述, 有兴趣的读者可以参考 [**2**].

定理 3.7 (Sobolev 紧嵌入定理). 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中边界光滑的有界开子集，以及 $1 \leq q \leq r$，其中 $1/r = 1/p - 1/n$. 我们有如下紧嵌入：

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

即对任意 $(u_n)_{n\geq 1} \subset W^{1,p}(\Omega)$，以及 $||u_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$，则存在子列 $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ 以及 $u_0 \in \mathcal{L}^q$，使得范数 $||-||_q$ 下强收敛

$$u_{n_k} \to u_0$$

注 3.4. 回忆第2章的 Riesz 定理，我们知道空间 $W^{1,p}$ 中的有界闭集不是紧集，因此 (u_n) 的极限不一定落在 $W^{1,p}$ 中，但上述紧嵌入定理保证这个极限可以在更大的空间 $\mathcal{L}^q$ 中.

CHAPTER 11

Gromov-Hausdorff 收敛

旨趣. 80 年代 Gromov 给出关于研究一族黎曼流形关系的系列讲演, 这个系列讲演被 Lafontaine 和 Pensu 写成讲义并引起了许多几何学家的兴趣，参见 [**23**]. 不同于以往黎曼几何的研究限制在一个流形上，Gromov 的观点是将一族黎曼流形视为一个空间，研究不同流形之间的距离关系，更一般地可以研究一族 (紧) 度量空间构成的空间; 特别地，可以研究一列黎曼流形 (视为度量空间序列) 的敛散性情况, 一个重要的刻画这种敛散性的指标就是 Gromov-Hausdorff 拓扑，我们将在本章的第一节中介绍这种拓扑. 此外，早期这种收敛理论中最有名的结果之一当属 Ricci 曲率有下界的黎曼流形序列收敛的极限空间 (Gromov-Hausdorff 极限空间)，我们将利用 Gromov 预紧性定理以及 Gromov-Bishop 体积比较定理给出这类曲率有下界流形的极限空间的估计.

1. Gromov-Hausdorff 拓扑

1.1. Gromov-Hausdorff 距离. 回忆第1章的问题9，我们曾定义了 Gromov-Hausdorff 度量.

定义 1.1. 设 (X, d) 为一个完备度量空间，A, B 为有界闭子集，定义 A 与 B 的 **Hausdorff 度量**为

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \inf\{\epsilon \geq 0 : A \subset B_\epsilon(B),\ B \subset B_\epsilon(A)\}$$

其中 $B_\epsilon(B) := \{y \in X : d(y, B) < \epsilon\}$，$B_\epsilon(A)$ 同理.

我们取集合

$$\mathcal{X} := \{X \text{ 的所有有界闭子集}\}$$

容易验证 $d_{\mathcal{H}}$ 在 $\mathcal{X}$ 中是一个度量，进而 $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{H}})$ 是一个度量空间.

练习 1.1. 验证上述论断. [提示，利用 A, B 为有界闭集.]

第1章的例1.6中我们将黎曼流形 (M, g) 做成一个度量空间，其中度量为

$$d(x, y) := \inf_{\gamma \in \Omega_{x,y}} L[\gamma]$$

其中 L 为长度泛函，见小小节2.1.2，并且

$$\Omega_{x,y} := \{\gamma : [0,1] \to M : \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y,\ \gamma \text{ 为分段光滑曲线}\}$$

并且流形拓扑与度量拓扑等价，即有同胚

$$M \cong (M, d)$$

定理 1.1. 在上文的设定下，$(\mathcal{X}, d_{\mathcal{H}})$ 是完备紧度量空间.

证明，SKETCH. 参见 [**13**]. □

现在我们将全体紧度量空间构成的集合记为 $\mathcal{M}$，研究两个不同度量空间之间的距离.

定义 1.2. 设 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 为两个紧度量空间，定义 X, Y 的 **Gromov-Hausdorff 距离**为

$$d_{G-H}(X, Y) := \inf_{(Z, d_Z)} \{d_{\mathcal{H}}^Z(X, Y) : X \hookrightarrow Z,\ Y \hookrightarrow Z\}$$

其中 $\hookrightarrow$ 在本章中都表示等距嵌入 (见第2章).

注意上述定义是良性的，事实上可以取 $Z = X \sqcup Y$，其中 $\sqcup$ 表示集合的无交并，在定义 Z 的度量为

$$d_Z|_X := d_X, \quad d_Z|_Y := d|_Y, \quad d_Z(x,y) := D,\ \forall x,y \in X,Y$$

其中 $\mathrm{diam}X, \mathrm{diam}Y \leq D$(注意到 X,Y 为紧度量空间).

练习 1.2. 验证上述 d_Z 是一个度量.

1980 年，Gromov 考虑了一个**允许度量**的条件，即如果 $d|_X = d_X, d|_Y = d_Y$ 且 d 是一个度量，进而规定

$$d'_{G-H}(X,Y) := \inf\{d_{\mathcal{H}}(X,Y) : d \text{ 为 } Z \text{ 上的允许度量}\}$$

事实上，$d_{G-H} = d'_{G-H}$，证明可以参见 [**13**]. 利用这个事实我们可以进一步验证 d_{G-H} 确实是一个度量[1]，并且使得 $(\mathcal{M}, d_{G-H})$ 为一个完备紧的度量空间，见定理1.1，我们称 $(\mathcal{M}, d_{G-H})$ 为 **Gromov-Hausdorff 空间**.

1.2. Gromov-Hausdorff 空间. 下面我们介绍一系列工具说明 d_{G-H} 是一个度量.

命题 1.1. d_{G-H} 满足三角不等式.

证明，SKETCH. 参见 [**13**]. □

事实上，$d_{G-H} \geq 0$ 与对称性是显然的，下面我们将证明

$$d(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 等距同构}$$

为此需要一些估计 Gromov-Hausdorff 距离的工具. 我们介绍两个引理：

引理 1.1. 若紧度量空间 Y 在紧度量空间 (X, d_X) 中 ϵ-稠密，则 $d_{G-H}(X,Y) \leq \epsilon$. 其中 ϵ-稠密指 $X \subset B_\epsilon(Y)$.

练习 1.3. 证明上述引理.

[1]为此我们需要在 $\mathcal{M}$ 中取商集 $\mathcal{M}/\sim$，其中等价关系 $\sim$ 定义为

$$X \sim Y \Longleftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 等距同构}$$

往后为叙述方便，简记 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}/\sim$.

引理 1.2. 设紧度量空间 X, Y 的 ϵ-稠密子集

$$A := \{x_1, \cdots, x_N\}, \quad B := \{y_1, \cdots, y_N\}$$

且满足

$$|d_X(x_i, x_j) - d_Y(y_i, y_j)| \le \epsilon, \quad 1 \le i, j \le N$$

则 $d_{G-H}(A, B) \le \epsilon$，进而 $d_{G-H}(X, Y) \le \epsilon$.

证明. 令 $Z = X \sqcup Y$，规定其上度量为

$$d_Z(x_i, y_i) := \epsilon, \quad d_Z(x_i, y_j) = \min_k \{d(x_i, x_k) + \epsilon + d(y_j, y_k)\}$$

不难验证 d_Z 是一个度量. 因此

$$\begin{aligned} d_Z(y_k, x_i) + d_Z(y_k, x_j) &\ge d_Z(x_k, x_l) + d_Z(x_k, x_m) \\ &\quad + d_Z(x_l, x_i) + d(x_m, x_j) \\ &\ge d_Z(x_i, x_j) \end{aligned}$$

其中第一个不等号利用已知条件. 又 $d_{G-H}(A, B) \le d^Z_{\mathcal{H}}(A, B) = \epsilon$，于是引理成立. □

练习 1.4. 验证上述证明中的 d_Z 是一个度量.

定义 1.3. 设 X, Y 为紧度量空间，称 $f : X \to Y$ 是一个 **ϵ-Gromov-Hausdorff 映射** (简称 $\epsilon - \mathrm{GH}$)，如果满足

(1) **ϵ-等距**：$|d_Y((f_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)| < \epsilon$.
(2) **ϵ-满射**：$Y \subset B_\epsilon(X)$.

注 1.1. f 为等距同构当且仅当 $0 - \mathrm{GH}$.

利用引理1.2中的离散点集，我们可以证明如下定理，它刻画了 $\epsilon - \mathrm{GH}$，参见 [**13**].

定理 1.2. 设 X, Y 为紧度量空间，

(1) $f : X \to Y$ 为 $\epsilon - \mathrm{GH}$，则 $d_{G-H}(X, Y) \le 6\epsilon$.
(2) 若 $d_{G-H}(X, Y) \le \epsilon$，则存在 $6\epsilon - \mathrm{GH}$ $f : X \to Y$.

进而容易验证

$$d(X,Y)=0 \Longleftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 等距同构}$$

因此我们证明了:

定理 1.3. $(\mathcal{M}, d_{G-H})$ 是完备的紧度量空间.

注 1.2. 事实上, $\mathcal{M}$ 还是可分的, 参见 [**13**].

1.3. Gromov 预紧性定理.

定义 1.4. 设 (X,d_X) 为道路连通的度量空间, 对任一道路 $\gamma: [0,1]\to X$, 定义 γ 的**长度**为

$$L[\gamma] := \sup_{0=t_0<\cdots<t_N=1}\left(\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1}))\right)$$

进一步称 X 是一个长度空间, 如果对任意 $x_1,x_2\in X$ 存在道路 γ(其实是测地线) 使得 $\gamma(0)=x_1$, $\gamma(1)=x_2$, 且 $L[\gamma]=d(x_0,x_1)$.

注 1.3. 显然完备黎曼流形一定是长度空间 (由 Hopf-Rinow 定理).

定理 1.4. 设 $\{(X_n,d_n)\}_{n\geq 1}$ 为一列长度空间,在 Gromov-Hausdorff 度量下的有收敛:

$$(X_n,d_n)\to(X,d)$$

则 (X,d) 也为长度空间.

这个定理由以下引理即得, 参见 [**13**]:

引理 1.3. 设 (X,d) 为完备度量空间, 则 X 为长度空间当且仅当对任意 $x_1,x_2\in X$, 存在中点 x_3, 即

$$d(x_1,x_3)=d(x_2,x_3)=\frac{1}{2}d(x_1,x_2)$$

练习 1.5. 证明上述引理.

此外, 可以定义带基点的 Gromov-Hausdorff 距离 (简记 PGH):

$$d^p_{G-H}((X,x),(Y,y)) := \inf\{d^Z_{\mathcal{H}} + d_Z(x,y), \quad X\hookrightarrow Z,\ Y\hookrightarrow Z\}$$

其中 $(X,x),(Y,y)$ 为带**基点**的紧度量空间, 其中 $x\in X, y\in Y$.

定义 1.5. 称带基点的紧度量空间列 $(X_n, d_n, x_n)_{n\geq 1}$ 在 PGH 意义下收敛于 (X, d, x)，其中 $x \in X$，如果对任意 $R > 0$，有

$$(\overline{B_R(x_n)}, d_n, x_n) \to (\overline{B_R(x)}, d, x)$$

其中

$$d^p_{G-H}\left((\overline{B_R(x_n)}, d_n, x_n), (\overline{B_R(x)}, d, x)\right) \to 0$$

定义 1.6. 设 (X, d) 为紧度量空间以及 $r > 0$，定义 X 的**容度**为

$$\mathrm{Cap}_X(r) := \max \#\{B_{r/2}(x) \subset X \text{为互不相交的开球}\} < \infty$$

其中 # 表示有限集中元素个数.

练习 1.6. 证明：若 $\mathrm{Cap}_X(r+\epsilon) = N$，则存在 N 个的开球 $B_{(r+\epsilon)/2}(x_i)$，$i = 1, \cdots, N$ 覆盖 X.

练习 1.7. 若 $d_{G-H}(X, Y) \leq \epsilon/3$，则对任意 $r > 0$，都有

$$\mathrm{Cap}_Y(r+\epsilon) \leq \mathrm{Cap}_X(r)$$

利用这两个练习，我们得到 Gromov 在 80 年代的工作，它为判断 Gromov-Hausdorff 空间 $\mathcal{M}$ 中的预紧集 (见第1章定理1.8) 提供工具，证明可见 [**13**].

定理 1.5 (Gromov，1980). 设 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{M}$ 中子集，则 $\mathcal{C}$ 预紧当且仅当存在映射 $N : (0,1) \to \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mathrm{Cap}_X(r) \leq N(r), \quad \forall X \in \mathcal{C},\ 0 < r < 1$$

2. Gromov 预紧性定理在几何中的应用

2.1. Doupling 测度. 上一节中我们介绍了 Gromov 预紧性定理，其在几何学中的应用往往是利用充分性，即说明子集 $\mathcal{C}$ 中元素的容度可被一致的函数 N 控制，特别地，这里的子集总是度量空间序列 $(X_n, d_n)_{n\geq 1}$. 更特别地，这里的 X_n 是更具体的度量空间，例如黎曼流形，也就是说我们可以研究一列满足某种条件的黎曼流形 $(M_n, g_n)_{n\geq 1}$ 在 Gromov-Hausdorff 拓扑下的收敛情形. 而预紧性定理的结果告诉我们这个序列是预紧的，即存在收敛的子列，这又回到第5章 Ascoli 型的问题.

基于定理的可操作性的疑问，我们希望这里的控制函数 N 是与流形序列 (M_n, g_n) 有关的一个函数，最好是某个已知的集合量. 为此，我们介绍 Doupling 测度的概念.

定义 2.1. 设 (X, d, μ) 为紧的度量测度空间，其中 μ 为有限 Borel 测度 (参见 [**3**]). 称 μ 为关于常数 κ 的 **Doupling 测度**，如果

$$\mu(B_r(x)) \geq \kappa\mu(B_{2r}(x)), \quad \forall B_r(x) \subset X$$

进一步称 (X, d, μ) 为 **Doupling 测度空间**.

我们可以利用 Doupling 测度控制容度.

引理 2.1. 设 (X, d, μ) 为 Doupling 测度空间，且 $\mathrm{diam}X \leq D$，于是对任意 $0 < r < D$，我们有

$$\mathrm{Cap}_X(r) \leq C(\kappa)\left(\frac{D}{r}\right)^{\alpha(\kappa)}$$

证明. 任取 $x \in X$，由 Doupling 测度的定义可知

$$\mu(B_{r/2}(x)) \geq \kappa^{N+1}\mu(B_{2^N r}(x))$$

其中 $D \leq 2^N r \leq 2D$. 于是 $N - 1 \leq \log_2 \frac{D}{r}$，因此

$$\begin{aligned}
\mu(B_{r/2}(x)) &\geq \kappa^2 \cdot \kappa^{N-1}\mu(B_{2^N r}(x)) \\
&\geq \kappa^2 \cdot \kappa^{\log_2 \frac{D}{r}}\mu(X) \\
&= \kappa^2\mu(X)\left(\frac{D}{r}\right)^{\log_2 \kappa}
\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{Cap}_X(r) \leq \frac{\mu(X)}{\mu(B_{r/2}(x))} \leq \kappa^{-2}\left(\frac{D}{r}\right)^{\log_\kappa 2}$$

□

2.2. Gromov-Bishop 体积比较定理. 最后我们来解释 Doupling 测度在黎曼流形序列中如何使用. 回忆黎曼几何中的 Gromov-Bishop 体积比较定理，参见 [**1, 13**]，我们叙述之.

定理 2.1 (Gromov-Bishop). 设 (M,g) 为 n 维完备黎曼流形，其 Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ric} \geq (n-1)K$$

其中 K 为空间形式 $\mathcal{H}(K)$ 的截面曲率. 那么关于 r 的函数

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}(B_r^K)}$$

是单调不增的，其中 Vol 表示黎曼流形的体积测度，$B_r(p)$ 表示流形 M 中以 p 点为中心 r 为半径的测地球，B_r^K 表示空间形式 $\mathcal{H}(K)$ 中半径为 r 的测地球.

利用这个性质我们不难验证体积测度 Vol 是 Doupling 测度，也就是说，Ricci 曲率有下界

$$\mathrm{Ric} \geq (n-1)K$$

的流形是 Doupling 测度空间. 进而利用引理2.1引发 Gromov 预紧性定理. 我们来叙述这个过程：

取一列 Ricci 曲率有下界的流形 $(M_n, g_n)_{n\geq 1}$，由 Gromov-Bishop 体积比较定理可知 $(M_n, g_n)_{n\geq 1}$ 为 Doupling 测度空间列，由引理2.1和 Gromov 预紧性定理我们得到收敛的子列 $(M_{n_k}, g_{n_k})_{k\geq 1}$，不妨设收敛的极限为二元组

$$(M,g)$$

注意这里的 (M,g) 是一个度量空间.

注 2.1. (1) 上述过程有细微的瑕疵，由于 g_n 指代流形上的 Riemann 内积结构而非真正的度量 (见例1.6)，因此我们需要先行通过 g_n 诱导 M_n 上的度量 d_n，由于同胚 $M_n \cong (M_n, d_n)$，这个论断是合理的.

(2) 事实上极限空间 (M, g) 不一定是一个黎曼流形，几何上有可能出现类似锥 (cone) 的非正则的局部，因此若要求 M 仍是一个黎曼流形则需要添加更多条件；此外，研究这类黎曼流形序列收敛的工作会用到几何测度论的工具，有兴趣的读者可以进一步参考 [**13, 28**].

参考文献

[1] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. American Mathematical Society, 2008.

[2] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2022.

[3] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 1999.

[4] Qing Han. *Nonlinear elliptic equations of the second order*. American Mathematical Soc., 2016.

[5] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[6] H.Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2011.

[7] J.Conway. *A course in functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2019.

[8] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1991.

[9] K.Yosida. *Functional analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] D Martin and LV Ahlfors. *Complex analysis*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[11] Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, 1997.

[12] Munkres. *Introduction to Topology*. MIT Course Number, 2005.

[13] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*. Springer, 2016.

[14] Halsey Royden and Patrick Michael Fitzpatrick. *Real analysis*. China Machine Press, 2010.

[15] Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-hill New York, 1964.

[16] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Publishing Co, 1987.

[17] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineerin, 1991.

[18] Elias M. Stein / Rami Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.

[19] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press, 2009.

[20] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Princeton University Press, 2011.

[21] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Functional analysis: introduction to further topics in analysis*. Princeton University Press, 2011.

[22] 丁同仁. 常微分方程教程. 高等教育出版社, 2004.

[23] 陈维桓伍鸿熙. 黎曼几何选讲. 高等教育出版社, 1993.

[24] 周民强. 实变函数论. 北京大学出版社, 2001.

[25] 周蜀林. 偏微分方程. 北京大学出版社, 2005.

[26] 尤承业. 基础拓扑学讲义. 北京大学出版社, 1997.

[27] 李忠. 复分析导引. 复分析导引, 2004.

[28] 林芳华. 几何测度引论. 科学出版社, 2002.

[29] 白正国. 黎曼几何初步. 高等教育出版社, 1992.

[30] 程其襄. 实变函数与泛函分析基础. 高等教育出版社, 2019.

[31] 许以超. 线性代数与矩阵论（第二版）. 高等教育出版社, 2008.

[32] 尹智许全华, 马涛. 泛函分析讲义. 高等教育出版社, 2017.

[33] 郑维行. 实变函数与泛函分析概要. 高等教育出版社, 1980.

[34] 陈志杰. 代数基础：模、范畴、同调代数与层（修订版）. 高等教育出版社, 2024.

[35] 陈恕行. 现代偏微分方程导论. 科学出版社, 2018.